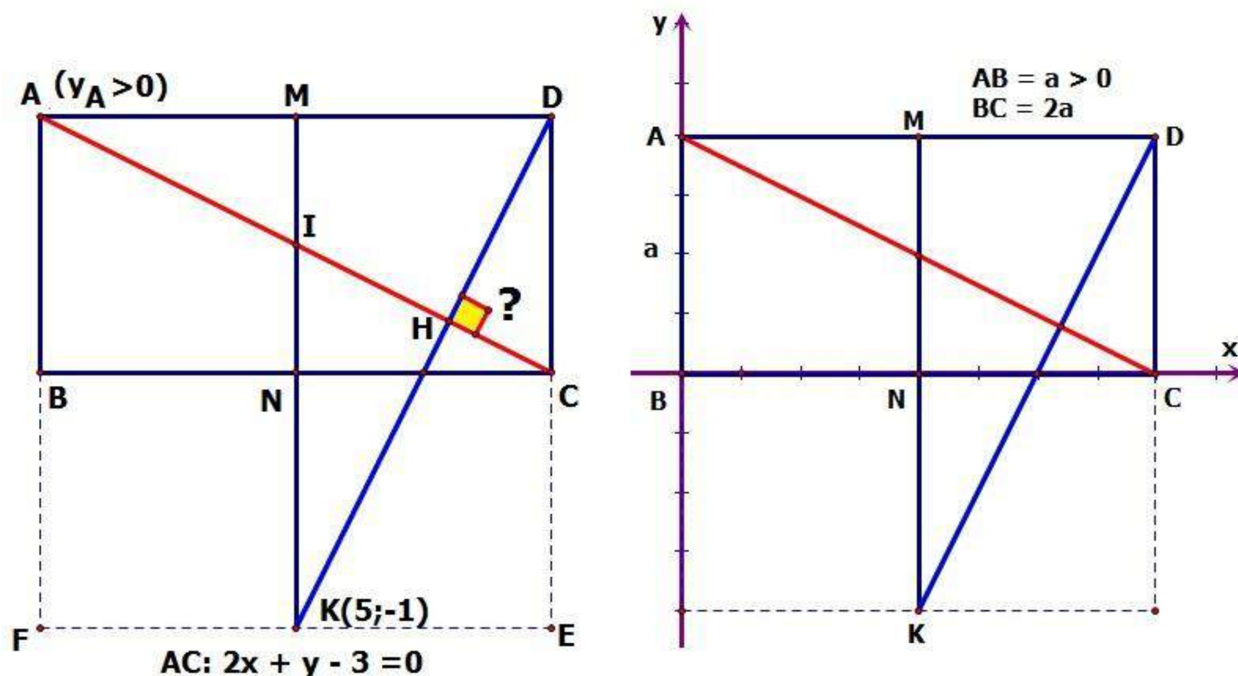
BÀI GIẢI LUYỆN THI HÌNH HỌC PHẲNG 2016

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có AD = 2AB, gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AD, BC. Trên đường thẳng MN lấy điểm K sao cho N là trung điểm của đoạn thẳng MK. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết $K(5;-1)$, phương trình đường thẳng chứa cạnh $AC: 2x+y-3=0$ và điểm A có tung độ dương. .

(*Trích đề thi thử tỉnh Bắc Ninh năm 2014*)

■ **Nhận xét và ý tưởng :**



Bài toán trên có thể chia thành hai bước:

+ Bước 1: chứng minh $AC \perp KD$ (dùng giả thiết quan trọng này để làm tiếp bước 2)

+ Bước 2: vận dụng $AC \perp KD$ vào việc giải tìm tọa độ của 4 đỉnh A, B, C, D.

☺ **Bước 1:** Nhận xét đầu tiên sau khi dựng hình xong đó là phát hiện KD ⊥ AC. Để chứng minh KD ⊥ AC có rất nhiều cách trong đó có thể kể đến:

● **Cách 1**: Chứng minh $KDC + ACD = 90^o$ (*chứng minh tổng 2 góc trong một tam giác bằng 90º suy ra góc* $DHC = 90^o \rightarrow$ Ta đã có $DAC + ACD = 90^o$ nên ta cần chứng minh $DAC = MKD$ (2 góc này bằng nhau do 2 tam giác $\Delta MKD = \Delta ACD$)

● **Cách 2**: Vẫn với ý tưởng như cách 1, ta chứng minh $HDC + ACD = 90^o$ để suy ra $DHC = 90^o \rightarrow$ Ta đã có $DAC + ACD = 90^o \rightarrow DAC = HDC$ (2 góc này bằng nhau do $\tan DAC = \tan HDC$, để dễ hiểu hơn chúng ta có thể mở rộng hình chữ nhật ABCD thành hình vuông ADEF (*và bạn đọc sẽ không còn quá xa lạ với việc chứng minh $AC \perp KD$*)

● **Cách 3**: Dựng hệ trục tọa độ Bxy như hình vẽ → tọa độ hóa các điểm và điều phải chứng minh tương đương với $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{KD}=0$. (*Bạn đọc có thể xem hình vẽ để hiểu rõ hơn*)

● **Cách 4**: Dựa trên ý tưởng chứng minh $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{KD}=0 \rightarrow$ Ta sử dụng tích vô hướng giữa hai véctơ $\vec{a}.\vec{b} = |a|.|b|.\cos(\vec{a},\vec{b})$. Cụ thể trong bài này ta sẽ gọi M = BC ∩ KD → chuyển bài toán chứng minh $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{KD}=0$ thành $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{MD}=0$ (Ta sẽ dùng quy tắc "chèn điểm" để tạo ra các tích vô hướng bằng 0 hoặc các

cạnh có độ dài và hợp góc cụ thể).

● **Cách 5**: Ta cũng có thể chứng minh "**điểm thuộc đường tròn**" dựa trên cách chứng minh tứ giác nội tiếp. Cụ thể trong bài này ta sẽ chứng minh "**H nhìn AK dưới một góc vuông**" → Xét thấy "**M cũng đang nhìn AK dưới một góc vuông** " → Ta sẽ chứng minh **AMHK là tứ giác nội tiếp** → ta cần chứng minh $DAC = MKD$ (2 góc liên tiếp cùng nhìn 1 cạnh MH bằng nhau) (*việc chứng minh này cũng tương tự như cách 1 và cách 2*).

● **Cách 6**: Ta có thể vận dụng **"định lý đảo Pytago"** để chứng minh ΔHCD ⊥ H ⇒ AC ⊥ KD → để thực hiện điều này bạn cần tính số đo của 3 cạnh HC, HD, CD theo 1 cạnh còn lại hoặc một cạnh cho trước đồng thời vận dụng "**định lý thuận Thales**" do xét thấy IC ∩ KD = H và IK // CD).

Ngoài ra các bạn còn có thể chứng minh bằng cách "gián tiếp đổi đường" chuyển từ bài toán chứng minh vuông góc sang song song, hoặc chứng minh trong tam giác vuông đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh có góc vuông bằng nửa cạnh huyền, v,v,...

☺ **Bước 2:** Sau khi đã chứng minh AC ⊥ KD. Ta có thể đi tiếp theo hai hướng sau:

+ **Hướng thứ 1**: (***tạo thêm phương trình đường thẳng mới***)

_ Viết phương trình KD → H = KD ∩ AC → tọa độ H.

_ Vận dụng định lý thuận Thales ở cách 6) → Ta tìm được tỉ số độ dài HK và HD → chuyển $KH = kKD \Rightarrow \overrightarrow{KH} = k\overrightarrow{KD}$, (k > 0) → tọa độ điểm D.

_ Viết phương trình đường thẳng AD qua điểm D và có véctơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a;b),\ (a^2+b^2>0)$ và AD tạo với AC một góc α với $\cos\alpha = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{\sqrt{AD^2+CD^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

_ Sau khi viết được phương trình AD → tìm được tọa độ điểm A → tọa độ tâm M → tọa độ tâm I của hình chữ nhật ABCD (dựa trên quan hệ MK = 3MI $\Rightarrow \overrightarrow{MK} = 3\overrightarrow{MI}$).

_ Có tọa độ tâm I (là trung điểm AC và BD) → tọa độ của B và C.

+ **Hướng thứ 2**: (***tìm tọa độ điểm A thông qua độ dài AK)***

_ Viết phương trình KD → H = KD ∩ AC → tọa độ H.

_ Tham số hóa điểm A theo đường AC → 1 ẩn nên cần một phương trình → độ dài AK = ?

_ Dựa vào định lý thuận Thales ở cách 6 ta tính được độ dài AK.

_ Có tọa độ điểm A $\xrightarrow{\overrightarrow{AH}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}}$ tọa độ C → tọa độ trung điểm I $\xrightarrow{\overrightarrow{CD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{KI}}$ tọa độ D → tọa độ B.

► **Hướng dẫn giải chứng minh AC ⊥ KD : Gọi H = AC ∩ KD**

* **Cách 1**: Ta có ΔMKD = ΔACD (c-g-c) ⇒ $DAC = MKD$.

Ta có: $DAC + ACD = 90^o \Leftrightarrow MKD + ACD = 90^o \Leftrightarrow HDC + ACD = 90^o$

Suy ra $DHC = 90^o$ ⇒ ΔHCD ⊥ H ⇒ **AC ⊥ KD tại H**

* **Cách 2**: Dựng hình vuông ADEF sao cho K là trung điểm EF.

Ta có: $\begin{cases} \tan DAC = \frac{CD}{AD} = \frac{1}{2} \\ \tan MKD = \frac{MD}{MK} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \tan DAC = \tan MKD \Leftrightarrow DAC = MKD$

Ta có: $DAC + ACD = 90^o \Leftrightarrow KDE + ACD = 90^o \Leftrightarrow HDC + ACD = 90^o$

Suy ra $DHC = 90^o$ ⇒ ΔHCD ⊥ H ⇒ **AC ⊥ KD tại H**

* **Cách 3**: Dựng hệ trục Bxy như hình vẽ, Đặt cạnh AB = a > 0 ⇒ AD = 2AB = 2a

Ta có: $A(0;a),\ C(2a;0),\ D(2a;a),\ K(a;-a)$

Mặt khác $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (2a;-a) \\ \overrightarrow{KD} = (-a;-2a) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{KD} = -2a^2 + 2a^2 = 0 \Rightarrow$ **AC ⊥ KD tại H**

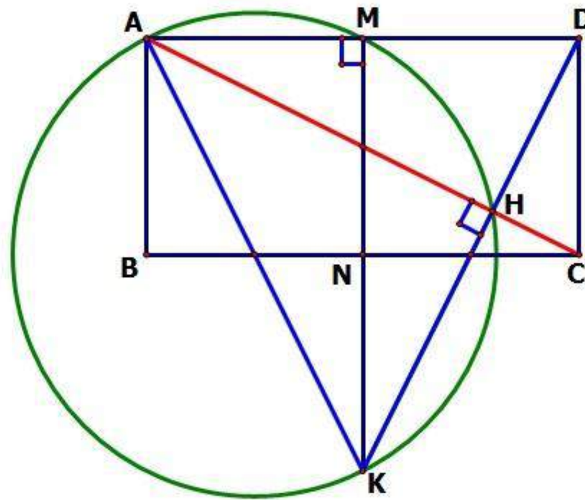
* **Cách 4**: Gọi M = KD ∩ BC.

Xét: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{MD} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right).\left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{CD}$

Với $\begin{cases} \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{MC} = AD.MC.\cos(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{MC}) = 2a.\dfrac{a}{2}\cos 0^o = a^2 \\ \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{MC} = 0 \ (do\ CD \perp MC) \\ \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD} = 0 \ (do\ AD \perp CD) \\ \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CD}^2 = -a^2 \end{cases}$ nên $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{MD} = a^2 - a^2 = 0$

Suy ra AC ⊥ MD ⇒ **AC ⊥ KD tại H**

* **Cách 5**:



Ta có: $\begin{cases} \tan DAC = \dfrac{CD}{AD} = \dfrac{1}{2} \\ \tan KDE = \dfrac{KE}{DE} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \tan DAC = \tan KDE \Leftrightarrow DAC = KDE$

Suy ra tứ giác AMHK là tức giác nội tiếp (2 góc liên tiếp cùng nhìn 1 cạnh bằng nhau)

Mà M nhìn AK dưới một góc vuông ⇒ H nhìn AK dưới một góc vuông ⇒ ΔHAK ⊥ H

Suy ra **AC ⊥ KD tại H**

* **Cách 6**: Gọi M = KD ∩ BC.

Ta có KI // CD và IC ∩ KD = H, theo định lý thuận Thales ta có: $\dfrac{IH}{HC} = \dfrac{HD}{HK} = \dfrac{IK}{CD} = \dfrac{3}{2}$

Suy ra $HC = \dfrac{2}{3}IH = \dfrac{2}{5}IC = \dfrac{AC}{5} = \dfrac{CD\sqrt{5}}{5}$ và $HD = \dfrac{2}{3}HK = \dfrac{2}{5}KD = \dfrac{2CD\sqrt{5}}{5}$

Xét $\begin{cases} HC^2 = \dfrac{CD^2}{5} \\ HD^2 = \dfrac{4CD^2}{5} \end{cases} \Rightarrow \boxed{HC^2 + HD^2 = CD^2}$ (theo định lý đảo Pytago) ⇒ ΔHCD ⊥ H ⇒ **AC ⊥ KD**

► **Hướng dẫn giải hướng thứ 1:**

* Gọi H = AC ∩ KD. Do KD ⊥ AC: 2x + y - 3 = 0 ⇒ KD: x - 2y + m = 0.

KD qua K(5; -1) ⇒ m = -7. Vậy **KD: x - 2y - 7 = 0**

* Tọa độ H là nghiệm của hê: $\begin{cases}2x+y-3=0\\x-2y-7=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{13}{5}\\y=\dfrac{-11}{5}\end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{13}{5};\dfrac{-11}{5}\right)$

* Ta có $\dfrac{IH}{HC}=\dfrac{HD}{HK}=\dfrac{IK}{CD}=\dfrac{3}{2}$ (theo định lý thuận Thales) $\Rightarrow HD=\dfrac{2}{3}KH \Rightarrow \overrightarrow{HD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{KH}$

Suy ra $\begin{cases}x_D-\dfrac{13}{5}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{13}{5}-5\right)\\y_D+\dfrac{11}{5}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{-11}{5}+1\right)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_D=1\\y_D=-3\end{cases} \Rightarrow \boxed{D(1;-3)}$

* Gọi $\vec{n}=(a;b),\ (a^2+b^2>0)$ là véctơ pháp tuyến của AD.

Đường thẳng AD qua D có dạng là: **a(x - 1) + b(y + 3) = 0**

Ta có $\cos CAD=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AD}{\sqrt{AD^2+CD^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Mặt khác $\cos CAD=|\cos(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC})|=\dfrac{|\vec{n}.\overrightarrow{n_{AC}}|}{|\vec{n}|.|\overrightarrow{n_{AC}}|}=\dfrac{|2a+b|}{\sqrt{5}\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Suy ra $(2a+b)^2=4(a^2+b^2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=0 \Rightarrow AD: x-1=0\\3b=4a \Rightarrow AD: 3x+4y+9=0\end{array}\right.$

* **TH1:** Với AD: 3x + 4y + 9 = 0.

Ta có A = AD ∩ AC ⇒ Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases}2x+y-3=0\\3x+4y+9=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{21}{5}\\y=\dfrac{-27}{5}\end{cases} \Rightarrow A\left(\dfrac{21}{5};\dfrac{-27}{5}\right)$

Loại vì A có tung độ dương.

* **TH2:** Với AD: x - 1 = 0

Ta có A = AD ∩ AC ⇒ Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases}2x+y-3=0\\x-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=1\end{cases} \Rightarrow \boxed{A(1;1)}$

Nhận vì A có tung độ dương.

Do M là trung điểm AD ⇒ M(1; - 1).

Gọi I là tâm hình chữ nhật ABCD, ta có $\overrightarrow{MK}=3\overrightarrow{MI} \Rightarrow I(2;-1)$

Mặt khác I là trung điểm AC và BD ⇒ B(3;1) và C(3; -3)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(1;1),\ B(3;1),\ C(3;-3),\ D(1;-3)}$

► **Hướng dẫn giải hướng thứ 2:**

* Gọi H = AC ∩ KD. Do KD ⊥ AC: 2x + y - 3 = 0 ⇒ KD: x - 2y + m = 0.

KD qua K(5; -1) ⇒ m = -7. Vậy **KD: x - 2y - 7 = 0**

* Tọa độ H là nghiệm của hê: $\begin{cases}2x+y-3=0\\x-2y-7=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{13}{5}\\y=\dfrac{-11}{5}\end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{13}{5};\dfrac{-11}{5}\right)$

* Ta có A ∈ AC: 2x + y - 3 = 0 ⇒ A(a; 3 - 2a).

Do A có tung độ dương nên 3 - 2a > 0 ⇒ $a<\dfrac{3}{2}$ và $\overrightarrow{KA}=(a-5;4-2a)$

Mặt khác $AK=KD=\dfrac{5}{3}KH=\dfrac{5}{3}d[K;AC]=\dfrac{5}{3}.\dfrac{|5.2-1.1-3|}{\sqrt{4+1}}=2\sqrt{5}$

Suy ra $AK^2 = 20 \Leftrightarrow (a-5)^2 + (4-2a)^2 = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1(n) \\ a = \dfrac{21}{5}(l) \end{array}\right.$ $a < \dfrac{3}{2}$. **Vậy** $A(1;1)$.

* Lại có $\dfrac{IH}{HC} = \dfrac{HD}{HK} = \dfrac{IK}{CD} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AI + IH}{AC} = \dfrac{\dfrac{AC}{2} + \dfrac{3IC}{5}}{AC} = \dfrac{\dfrac{AC}{2} + \dfrac{3AC}{10}}{AC} = \dfrac{4}{5}$

Suy ra $\overrightarrow{AC} = \dfrac{5}{4}\overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 1 = \dfrac{5}{4}\left(\dfrac{13}{5} - 1\right) \\ y_C - 1 = \dfrac{5}{4}\left(\dfrac{-11}{5} - 1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 3 \\ y_C = -3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(3;-3)}$

* Gọi I là tâm hình chữ nhật ABCD $\Rightarrow$ I là trung điểm AC và BD và I(2;-1)

Ta có $\dfrac{IK}{CD} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{IK} \Rightarrow \boxed{D(1;-3)} \xrightarrow{I(2;-1)} \boxed{B(3;1)}$

■ **Lời bình**: Có thể thấy bài toán đã vận dụng linh hoạt rất nhiều kỹ thuật, phương pháp để giải quyết các đối tượng cần tìm. Về phần chứng minh vuông góc, như các bạn đã thấy, với nhiều phương án tiếp cận khác nhau chúng ta có nhiều cách chứng minh khác nhau. Và sau khi đã chứng minh được AC ⊥ KD thì ở cả 2 hướng giải sau đó ta thấy được sức mạnh của việc **"vận dụng định lý Thales"** cũng như cách mà chúng ta **"chuyển đẳng thức độ dài về đẳng thức véctơ".**

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có $A(4;0)$, phương trình đường thẳng chứa trung tuyến kẻ từ B của tam giác ABC là $7x + 4y - 5 = 0$ và phương trình đường thẳng chứa trung trực cạnh $BC: 2x + 8y - 5 = 0$. Tìm tọa độ các điểm B, C, D.

(***Trích đề thi thử khối A, THPT Chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ, năm 2014***)

☺ **Nhận xét và ý tưởng :**

_ Dễ dàng nhận thấy $BD: 7x + 4y - 5 = 0$. Dựa vào tinh chất của đường trung trực BC thì d vừa vuông BC nên d vuông AD $\rightarrow$ viết phương trinh AD $\rightarrow$ $AD \cap BD = D$ nên ta tìm được tọa độ điểm D.

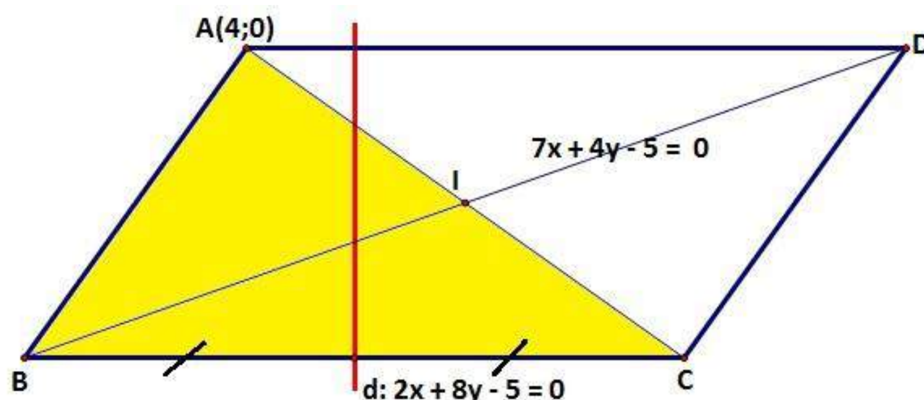
_ Đến đây để tìm tọa độ tìm điểm B và C thì ta chỉ cần tìm tọa độ của I là giao điểm của 2 đường cheo AC và BD. Dựa vào công thức trung điểm ta biểu diễn tọa độ B và C theo tọa độ của điểm I.

_ Cuối cùng có hai hướng đi tiếp:

+ **Hướng thứ 1**: Gọi K là trung điểm BC và biểu diễn tọa độ K theo tọa độ B và C. Khi đó K cũng thuộc đường thẳng trung trực của BC.

+ **Hướng thứ 2**: Ta có $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{u_d} = 0$. Giải phương trinh trên để tìm B và C. Mời bạn đọc cùng xem lời giải.

► **Hướng dẫn giải :**



* Từ giả thiết ta có $BD: 7x + 4y - 5 = 0$.

AD đi qua A(4;0) và vuông góc với $d: 2x + 8y - 5 = 0$ suy ra phương trình $\boxed{AD: 4x - y - 16 = 0}$

* Tọa độ D thỏa mãn hệ $\begin{cases} 7x+4y-5=0 \\ 4x-y-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D(3;-4)}$

* Gọi $I(a;b)$ là giao điểm của 2 đường chéo AC và BD $\Rightarrow \begin{cases} C(2a-4;2b) \\ B(2a-3;2b+4) \end{cases}$

Khi đó tọa độ trung điểm của BC là $J\left(\dfrac{4a-7}{2};2b+2\right)$

* Mặt khác $\begin{cases} J \in d \\ I \in BD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a-7+8(2b+2)-5=0 \\ 7a+4b-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\dfrac{-1}{2} \end{cases}$

Do đó tọa độ của **B(-1; 3) và C(-2; -1)**

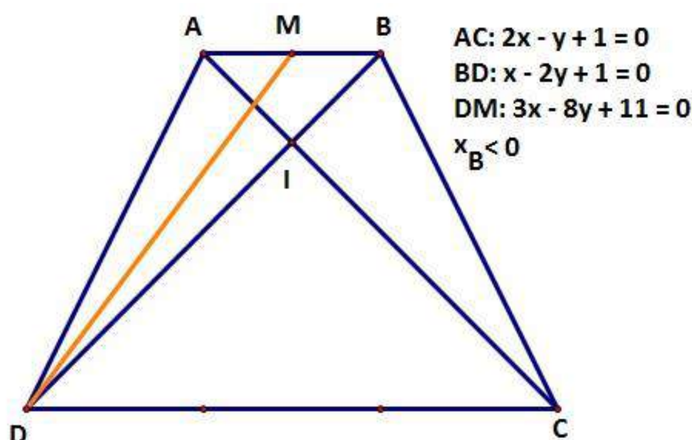
Vậy tọa độ các điểm cần tìm là $\boxed{B(-1;3), C(-2;-1), D(3;-4)}$

■ **Lời bình**: Có thể thấy được ngay vai trò của giao điểm 2 đường chéo hình binh hanh trong việc giải quyết bài toan tìm điểm trên. Trong các bài tập ví dụ minh họa, tác giả cũng nhấn mạnh đến việc chuyển các quan hệ chưa biết giữa các điểm về các quan hệ với giao điểm trên.

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang cân ABCD đáy lớn CD. Các đường thẳng AC, BD lần lượt có phương trinh $2x-y+1=0$ và $x-2y+1=0$. Gọi M là trung điểm của AB. Xác định tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết đường DM có phương trinh $3x-8y+11=0$ và B có hoành độ âm.

(***Trích đề thi thử THPT Nguyễn Đức Mậu, Nghệ An, năm 2013***)

☺ **Nhận xét và ý tưởng :**



_ Dễ dàng tìm được tọa độ D do $D = DB \cap DM$ và đồng thời điểm mới I với $I = AC \cap BD$.

_ Do tính chất của hình thang cân nên AC = BD nên IA = IB suy ra tam giác IAB cân tại I. Vì vậy MI vuông góc AB.

_ Ta có thể tham số A theo AC, B theo BD (2 ẩn nên cần 2 phương trinh) và biểu diễn tọa độ M theo tọa độ A và B. Do M thuộc DM nên ta được pt (1). Mặt khác MI vuông AB (pt (2)). Từ đây giải (1) và (2) ta tìm được tọa độ A và B.

_ Khi đó $C = CD \cap AC$ nên ta chỉ cần lập phương trinh đường thẳng CD qua D và CD // AB.

► **Hướng dẫn giải :**

* Ta có tọa độ D thỏa mãn hệ $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ 3x-8y+11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=-4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D(7;-4)}$

Và tọa độ I thỏa mãn hệ $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1}{3} \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{I\left(\dfrac{-1}{3};\dfrac{1}{3}\right)}$

* Ta có $\begin{cases} A \in AC \\ B \in BD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(a;1+2a) \\ B(-1+2b;b) \end{cases}$. Ta lại có M là trung điểm AB nên $M\left(\frac{a+2b-1}{2};\frac{2a+b+1}{2}\right)$

* Mặt khác, $\begin{cases} IM \perp AB \\ M \in DM \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13a+2b=11 \\ \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ a-b=\frac{-2}{3} \end{array}\right. \\ b<\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$ suy ra $\boxed{A(1;3),\ B(-3;-1)}$

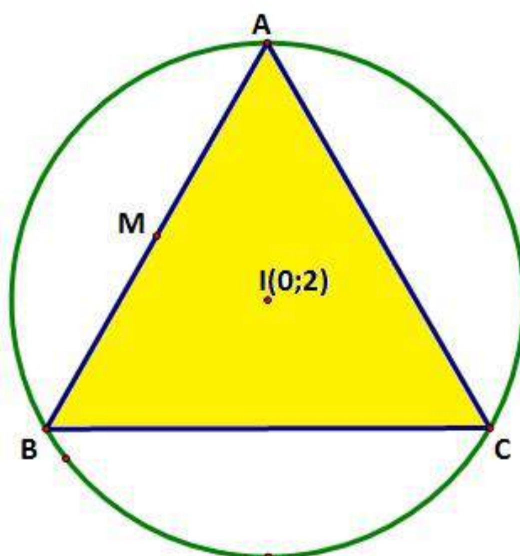
* Phương trình CD qua D và nhận $\overrightarrow{IM}$ làm vecto pháp tuyến và C là giao điểm giữa AC và CD nên ta có tọa độ $\boxed{C(-4;-7)}$

Vậy tọa độ các điểm thỏa yêu cầu bài toán là: $\boxed{A(1;3),\ B(-3;-1), C(-4;-7),\ D(7;-4)}$

Câu 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác đều *ABC* nội tiếp đường tròn (C): $x^2+y^2-4y-4=0$ và cạnh *AB* có trung điểm *M* thuộc đường thẳng $d: 2x-y-1=0$. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh *AB* và tìm tọa độ điểm *C*.

(Trích đề thi thử lần 4, THPT Quế Võ, Bắc Ninh, năm 2013)

☺ **Nhận xét và ý tưởng :**



_ Để viết phương trình đường AB ta chắc chắn phải sử dụng giả thiết liên quan đến trung điểm M mà cụ thể ở đây là tìm tọa độ điểm M. Do M thuộc d nên ta chỉ cần tìm thêm 1 phương trinh liên hệ với M.
_ Ở đây, ta chỉ có thể liên hệ M với I thông qua độ dài MI (sử dụng dữ kiện tam giác ABC đều).
_ Mặt khác C cũng là giao điểm giữa MI và đường tròn (C) nên ta chỉ cần viết phương trinh MI.

► **Hướng dẫn giải :**

* (C) có tâm $I(0;2)$ và bán kinh R = $2\sqrt{2}$. Gọi tọa độ điểm $M(m;2m-1)$

* Do tam giác ABC đều nội tiếp (C) nên

$$IM = \frac{R}{2} \Leftrightarrow m^2+(2m-3)^2=2 \Leftrightarrow 5m^2-12m+7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\frac{7}{5} \end{array}\right.$$

* Với m = 1 suy ra M(1; 1)

Khi đó, AB qua M và nhận $\overrightarrow{IM}=(1;-1)$ có phương trinh: $x-y=0$

Mặt khác phương trình MC là $MC: x+y-2=0$.

Do đó tọa độ C thỏa mãn hệ $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2-4x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, y=0 \\ x=-2, y=4 \end{array}\right.$

Vì C(2;0) cùng phía với M so với I nên không thỏa mãn. Ta nhận $\boxed{C(-2;4)}$

* Với m = $\frac{7}{5}$ suy ra $M\left(\frac{7}{5};\frac{9}{5}\right)$

Khi đó, AB qua M và nhận $\overrightarrow{IM}=\left(\frac{7}{5};\frac{-1}{5}\right)$ có phương trình: $7x-y+2=0$

Mặt khác phương trình MC là $MC: x+7y-14=0$.

Do đó tọa độ C thỏa mãn hệ $\begin{cases} x+7y=-14 \\ x^2+y^2-4x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{-14}{5}, y=\frac{12}{5} \\ x=\frac{14}{5}, y=\frac{8}{5} \end{array}\right.$

Vì $\boxed{C\left(\frac{-14}{5};\frac{12}{5}\right)}$ cùng phía với M so với I nên không thỏa mãn. Ta nhận $\boxed{C\left(\frac{14}{5};\frac{8}{5}\right)}$

Vậy yêu cầu bài toán tương đương với $\boxed{\begin{cases} C(-2;4) \\ AB: x-y=0 \end{cases} \textit{ hay } \begin{cases} C\left(\frac{14}{5};\frac{8}{5}\right) \\ AB: 7x-y+2=0 \end{cases}}$

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC. Biết phương trình các đường thẳng chứa đường cao BH, phân giác trong AD lần lượt là 3x + 4y + 10 = 0, x – y + 1 = 0; điểm M(0; 2) thuộc đường thẳng AB và MC = $\sqrt{2}$. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC biết rằng C có hoành độ nguyên.

(*Trích đề thi thử THPT Tuy Phước, Bình Định, năm 2013*)

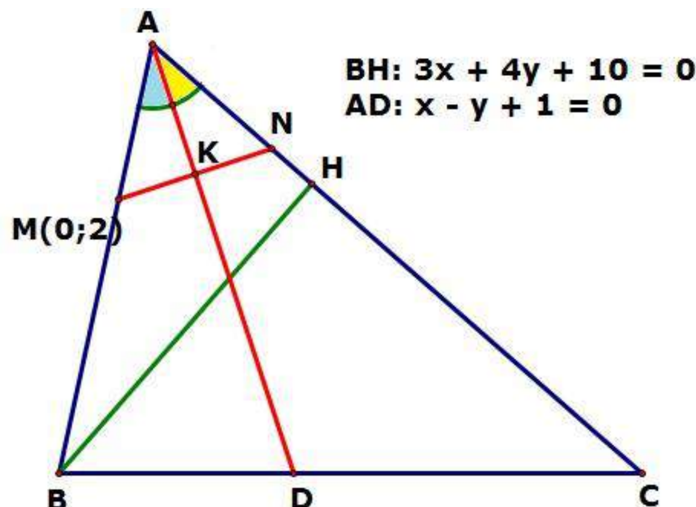
☺ **Nhận xét và ý tưởng :**

_ Dựa vào tinh chất của phân giác ta dễ dàng tìm được điểm mới N (bạn đọc có thể xem lại chương 2 để hiểu rõ hơn).

_ Khi đó ta dễ dàng viết được phương trinh AC vuông góc BH và qua N. Đồng thời tìm được điểm A do A là giao điểm giữa AC và AD.

_ Tới đây thì việc tìm tọa độ B bằng cách tương giao 2 đường AB và BH (viết phương trinh AB qua A và M). Với tọa độ C thì ta có thể tham số hóa C theo đường AC và sử dụng giả thiết $MC=\sqrt{2}$ để giải tìm tọa độ C. Mời bạn đọc xem lời giải.

► **Hướng dẫn giải:**



* Gọi N là điểm đối xứng với M qua AD, đường thẳng MN qua M(0; 2) và vuông góc AD có phương trình là: $x+y-2=0$.

Tọa độ giao điểm K của MN và AD là $K\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ suy ra tọa độ $N(1;1)$

* Vì AD là phân giác trong góc A, M thuộc AB nên N thuộc AC. Do đó AC qua N và vuông góc BH nên có phương trình: $4x-3y-1=0$

Ta có tọa độ A thỏa mãn hệ $\begin{cases}4x-3y-1=0\\ x-y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\ y=5\end{cases} \Rightarrow \boxed{A(4;5)}$

* Đường thẳng AB qua A và M có phương trình là $3x-4y+8=0$.

Ta có tọa độ B thỏa mãn hệ $\begin{cases}3x-4y+8=0\\ 3x+4y+10=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3\\ y=\frac{-1}{4}\end{cases} \Rightarrow \boxed{B\left(-3;\frac{-1}{4}\right)}$

* Ta có $MC=\sqrt{2}$ nên C thuộc đường tròn (C) tâm M, bán kinh $MC=\sqrt{2}$. Ngoài ra C thuộc AC nên tọa độ C là nghiệm của hệ:

$\begin{cases}x^2+(y-2)^2=2\\ 4x-3y-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1, y=1\\ x=\frac{31}{25}, y=\frac{33}{25}\end{array}\right.$ (do C có hoành độ nguyên ta nhận $\boxed{C(1;1)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(4;5),\ B\left(-3;\frac{-1}{4}\right),\ C(1;1)}$

Câu 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $A(5;-7)$, điểm C thuộc đường thẳng có phương trinh $x-y+4=0$. Đường thẳng đi qua D và trung điểm của đoạn thẳng AB có phương trình $3x-4y-23=0$. Tìm tọa độ điểm B và C, Biết B có hoành độ dương.

(***Trích đề thi thử THPT Chuyên Vĩnh Phúc, năm 2014***)

☺ **Nhận xét và ý tưởng :**

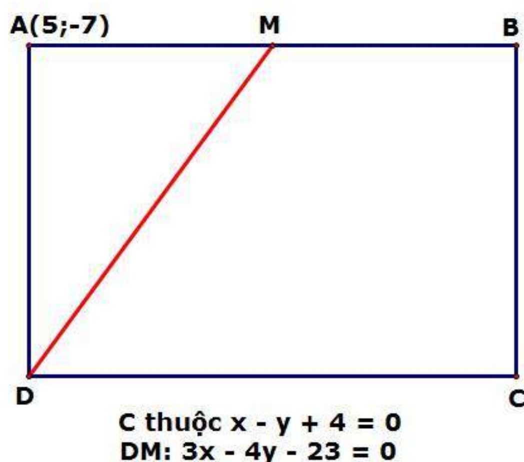
_ Ta liên hệ quan hệ giữa 4 điểm đặc biệt A, M, C, D bằng cách cho AC cắt DM tại I.

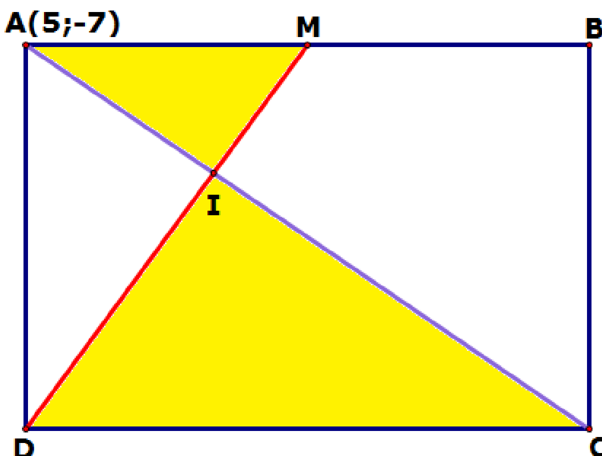
_ Vận dụng định lý Thales thuận quen thuộc ta có được tỉ số độ dài giữa các cạnh $\frac{CD}{AM}=\frac{IC}{IA}=\frac{ID}{IM}=2$. Từ đây ta có thể tham số hóa C theo đường thẳng x – y + 4 = 0 và đồng thời biểu diễn tọa độ I theo A và C.

_ Lại có I thuộc đường thẳng DM nên thay vào ta sẽ tìm được tọa độ của điểm C.

_ Để xác định tọa độ điểm B ta liên hệ qua trung điểm M thuộc DM và sử dụng tính chất của hình chữ nhật ABCD là $AB \perp BC$ để giải tìm tọa độ điểm B.

► **Hướng dẫn giải:**





* Ta có $C \in x-y+4=0 \Rightarrow C(c;c+4)$, M là trung điểm AB và I là giao điểm AC và DM.

* Theo định lý Thales thuận ta có $\frac{CD}{AM}=\frac{IC}{IA}=\frac{ID}{IM}=2 \Rightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow I\left(\frac{c+10}{3};\frac{c-10}{3}\right)$

Mặt khác I thuộc DM nên ta có $3\frac{c+10}{3}-4\frac{c-10}{3}-23=0 \Leftrightarrow c=1 \Rightarrow \boxed{C(1;5)}$

* Ta có M thuộc MD $\Rightarrow M\left(m;\frac{3m-23}{4}\right) \Rightarrow B\left(2m-5;\frac{3m-9}{2}\right)$

Và $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\left(2m-10;\frac{3m+5}{2}\right)\\ \overrightarrow{CB}=\left(2m-6;\frac{3m-19}{2}\right)\end{cases}$. Lại có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}=0 \Leftrightarrow (2m-10)(2m-6)+\left(\frac{3m+5}{2}\right)\left(\frac{3m-19}{2}\right)=0$

Suy ra $m=1$ *hay* $m=\frac{29}{5}$

* Do đó $B(-3;-3)$ *hay* $B\left(\frac{33}{5};\frac{21}{5}\right)$. Do B có hoành độ dương nên ta nhận $\boxed{B\left(\frac{33}{5};\frac{21}{5}\right)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B\left(\frac{33}{5};\frac{21}{5}\right),\ C(1;5)}$

Câu 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật *ABCD* có diện tích bằng 12. Tâm *I* là giao điểm của hai đường thẳng $d_1: x-y-3=0$ và đường thẳng $d_2: x+y-6=0$. Trung điểm của cạnh AD là giao điểm của d_1 với trục hoành. Xác định tọa độ bốn đỉnh của hình chữ nhật.

(*Trích đề thi thử lần 2, THPT Thanh Chương 3, Nghệ An, năm 2013*)

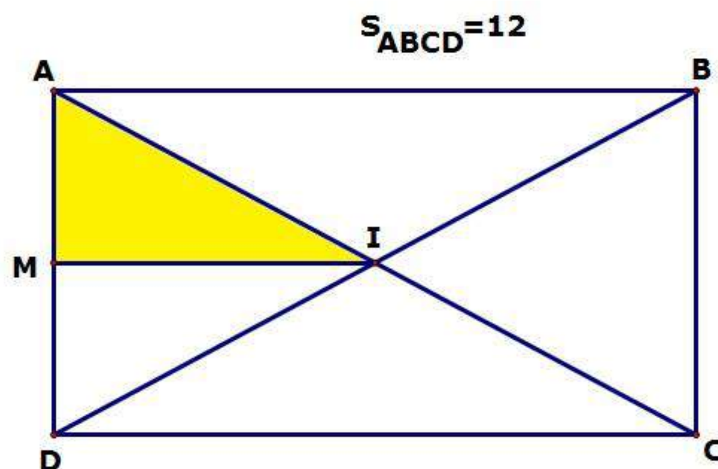
☺ **Nhận xét và ý tưởng :**

_ Với gợi ý của đề bài ta dễ dàng xác định được tọa độ của trung điểm M và tâm I. Điều này giúp ta dễ dàng viết phương trình đường thẳng AD qua M và AD vuông góc với MI.

_ Đối với hình chữ nhật thì luôn có một đường tròn ẩn minh chinh là đường tròn tâm I bán kinh IA. Như vậy ta cần xác định độ dài IA. Ở đây ta dựa vào quan hệ của diện tích hình chữ nhật để tính độ dài IA.

_ Khi đó A và D là giao điểm đường tròn trên và đường thẳng AD. Và đồng thời tọa độ B và D thì tìm được dựa vào tâm I của hình chữ nhật.

► **Hướng dẫn giải :**



* Tọa độ I là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x-y-3=0\\ x+y-6=0\end{cases} \Rightarrow \boxed{I\left(\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)}$.

Gọi M là trung điểm của AD, Tọa độ của M là nghiệm của hệ $\begin{cases}y=0\\ x-y-3=0\end{cases} \Rightarrow \boxed{M(3;0)}$

Suy ra AB = 2 IM = $3\sqrt{2}$.

* Mặt khác $S_{ABCD} = AB.AD \Rightarrow AD = \frac{S_{ABCD}}{AB} = \frac{12}{3\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Vì M, I cùng thuộc d_1 suy ra AD $\perp d_1$.

Vậy AD đi qua điểm M và nhận $\vec{n} = (1;1)$ làm vtpt có phương trình: $x-3+y=0 \Leftrightarrow x+y-3=0$.

* Lại có MA = MD = $\frac{AD}{2} = \sqrt{2}$. Tọa độ điểm A, D là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y-3=0 \\ \sqrt{(x-3)^2+y^2} = \sqrt{2} \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} hay \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$ Chọn $A(2;1); D(4;-1)$

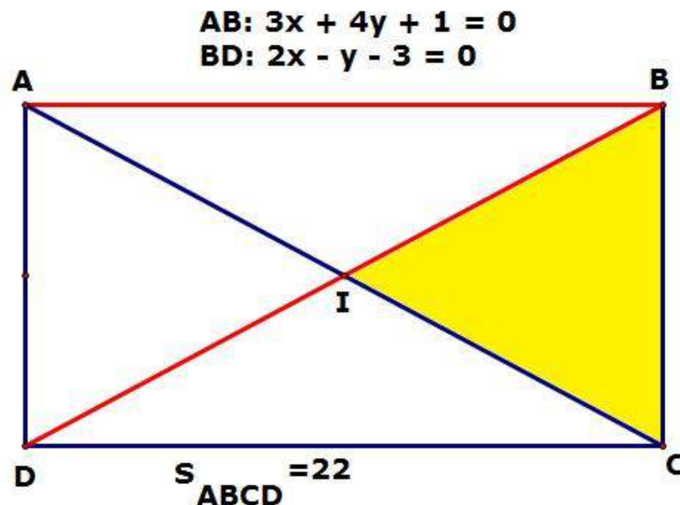
* Các điểm C, B lần lượt đối xứng với A, B qua I. Suy ra tọa độ điểm C(7; 2); B(5;4)

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là $\boxed{A(2;1);\ B(5;4),\ C(7;2);\ D(4;-1)}$

Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng 22, biết rằng các đường thẳng AB, BD lần lượt có phương trinh là $3x+4y+1=0$ và $2x-y-3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D.

(*Trích đề thi thử khối A, THPT Bỉm Sơn, Thanh Hóa, năm 2013*)

☺ **Nhận xét và ý tưởng :**



_ Dễ dàng tìm được tọa độ điểm B do $B = BD \cap AB$. Ngoài việc sử dụng các đường thẳng tìm điểm mới ta còn có thể tính góc giữa các đường để tìm quan hệ giữa các cạnh từ đó chuyển về quan hệ độ dài và diện tích. Cụ thể trong bài này là $\cos\angle ABD = \cos(AB;BD) = ? \Rightarrow \tan\angle ABD = \frac{AD}{AB}$ và $S_{ABCD} = AD.AB$.

_ Đến đây ta có thể tham số hóa D theo BD hoặc A theo AB để liên hệ độ dài AD hoặc AB.

_ Khi đã có tọa độ điểm D ta có thể viết phương trình AD qua D vuông góc AB để từ đó tìm dễ dàng tọa độ điểm $A = AD \cap AB$. Đến đây ta có thể dùng quan hệ vecto để tìm điểm C thỏa $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

► **Hướng dẫn giải :**

* Tọa độ B thỏa mãn hệ $\begin{cases} 3x+4y+1=0 \\ 2x-y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(1;-1)}$

* Ta có $\cos\angle ABD = \frac{|3.2-4.1|}{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{2}{5\sqrt{5}} \Rightarrow \tan\angle ABD = \frac{11}{2} = \frac{AD}{AB}$ (1)

Mặt khác $S_{ABCD} = AB.AD = 22 \Rightarrow \begin{cases} AB=2 \\ AD=11 \end{cases}$

* Vì $D \in BD \Rightarrow D(d;3-2d)$. Ta có $AD = d[D;AB] = \frac{|11d-11|}{5} = 11 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=6 \\ d=-4 \end{array}\right.$

* Với d = 6 suy ra D(6; 9). Phương trình AD đi qua A, vuông góc với AB là $4x-3y+3=0$

$$\Rightarrow A = AD \cap AB = \left(\frac{-3}{5};\frac{1}{5}\right) \Rightarrow C\left(\frac{38}{5};\frac{39}{5}\right)$$

* Với d = -4 suy ra D(-4; -11). Phương trình AD đi qua A, vuông góc với AB là $4x-3y-17=0$

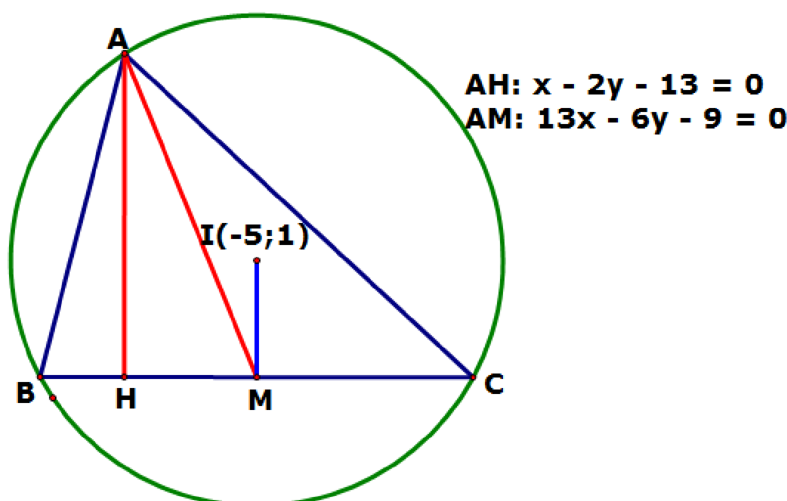
$$\Rightarrow A = AD \cap AB = \left(\frac{13}{5};\frac{-11}{5}\right) \Rightarrow C\left(\frac{-28}{5};\frac{-49}{5}\right)$$

Vậy tọa độ điểm thỏa cần tìm là:
$$\left[\begin{array}{l} A\left(\frac{-3}{5};\frac{1}{5}\right),\ B(1;-1),\ C\left(\frac{38}{5};\frac{39}{5}\right),\ D(6;9) \\ A\left(\frac{13}{5};\frac{-11}{5}\right),\ B(1;-1),\ C\left(\frac{-28}{5};\frac{-49}{5}\right),\ D(-4;-11) \end{array}\right.$$

Câu 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trinh đường cao AH và trung tuyến AM lần lượt là: $x-2y-13=0$ và $13x-6y-9=0$. Biết tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác tam giác ABC là $I(-5;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C

(*Trích đề thi thử THPT Hà Trung, Thanh Hóa, năm 2013*)

☺ **Nhận xét và ý tưởng :**



_ Dễ dàng tìm được tọa độ A (giao điểm AH và AM). Đồng thời ta có thể viết phương trình IM // AH và qua H (do tính chất đặc biệt của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

_ Khi đó M chinh là giao điểm của IM và AM nên tìm được tọa độ của điểm M.

_ Đến đây ta đã có thể viết phương trình đường BC qua M và vuông AH.

_ Tọa độ B và C chinh là giao điểm giữa BC và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

► **Hướng dẫn giải :**

* Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-2y-13=0 \\ 13x-6y-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-8 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-3;-8)}$

* Ta có IM qua I(-5;1) và song song AH. Phương trình IM là $x-2y+7=0$.

Tọa độ M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-2y+7=0 \\ 13x-6y-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{M(3;5)}$

* Đường thẳng BC qua M và vuông góc AH. Phương trình BC là $2x+y-11=0$

Do đó $B \in BC \Rightarrow B(b;11-2b)$

Lại có: $IB = IA \Leftrightarrow (b+5)^2 + (10-2b)^2 = 85 \Leftrightarrow b^2 - 6b + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \\ b=4 \end{array}\right.$

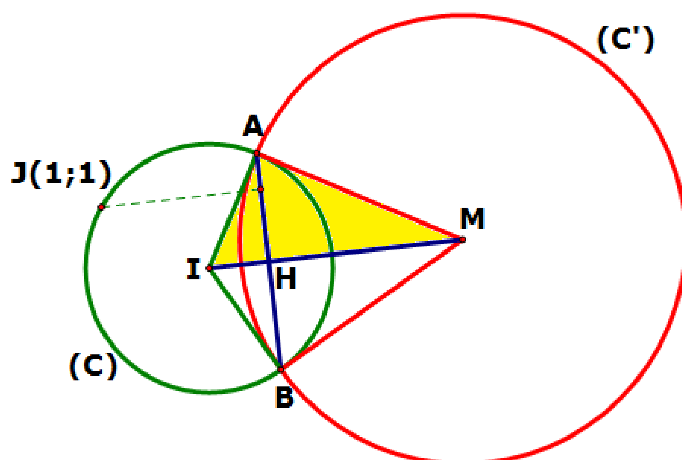
* Với b = 2 suy ra B(2; 7), C(4; 3)
* Với b = 4 suy ra B(4; 3), C(2; 7)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-3;-8),B(2;7),C(4;3)\ hay\ A(-3;-8),B(4;3),C(2;7)}$

Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=1$. Chứng minh rằng từ điểm M bất kỳ trên đường thẳng $d: x-y+3=0$ luôn kẻ được hai tiếp tuyến đến đường tròn (C). Gọi hai tiếp điểm A, B. Tìm tọa độ điểm M để khoảng cách từ $J(1;1)$ đến đường thẳng AB bằng $\frac{3}{2}$

(*Trích đề thi thử khối B, THPT Chuyên Bắc Ninh, năm 2013*)

☺ **Nhận xét và ý tưởng :** (Để hiểu rõ cách giải bài này bạn nên tham khảo về mảng kiến thức trục đẳng phương giữa hai đường tròn ở chủ đề 2.3, chương 2)



_ Để chứng minh với mọi M ta đều kẻ được 2 tiếp tuyến đến đường tròn (C) nghĩa là đề bài đang muốn kiểm tra ta có nắm vững kiến thức về xét vị trí tương đối giữa điểm và đường tròn không. Ở đây ta có thể chứng minh theo 2 hướng như sau

+ Hướng thứ 1: tính độ dài IM và chứng tỏ IM > R suy ra điều phải chứng minh. Ở cách này bạn bắt buộc phải tham số hóa điểm M theo đường thẳng d cho trước.

+ Hướng thứ 2: đó tính khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng d và chứng tỏ khoảng cách ấy lớn hơn R.

_ Để xác định tọa độ điểm M chắc chắn ta phải biểu diễn phương trình đường thẳng AB theo tham số của điểm M, như đã đề cập trước đó, AB chinh là trục đẳng phương của 2 đường tròn (C) và (C') có tâm M bán kinh AM.

_ Sau khi thiết lập phương trình AB ta sử dụng giả thiết cuối cùng là khoảng cách từ J đến AB để giải tìm tọa độ điểm M.

► **Hướng dẫn giải :**

* Ta có : (C) có tâm I(1; 2) và bán kinh R = 1 suy ra $d[I;d]=\frac{|1-2+3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}>1=R$

Suy ra mọi điểm M thuộc đường thẳng d đều nằm ngoài đường tròn (C) suy ra từ M luôn kẻ được hai tiếp tuyến đến (C).

* Gọi $M(m;m+3)\Rightarrow IM^2=2m^2+2\Rightarrow MA^2=MI^2-R^2=2m^2+1$

Do đó đường tròn (C') có tâm M bán kinh MA có phương trình:

$$(C'):(x-m)^2+(y-m-3)^2=2m^2+1$$

* Vì $\{A;B\}=(C)\cap(C')$ suy ra tọa đọ A, B đều thỏa phương trình:

$$\left[(x-m)^2+(y-m-3)^2\right]-\left[(x-1)^2+(y-2)^2\right]=2m^2\Leftrightarrow(1-m)x-(1+m)y+3m+2=0$$

Do đó phương trình đường AB là $\boxed{AB:(1-m)x-(1+m)y+3m+2=0}$

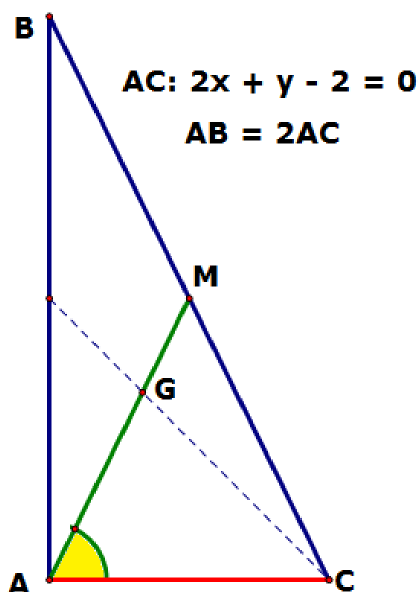
* Theo giả thiết ta có: $d[J;AB]=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{|m+2|}{\sqrt{2+2m^2}}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 7m^2-8m+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\frac{1}{7}\end{array}\right.$

Vậy tọa độ điểm M thỏa yêu cầu bài toán là: $\boxed{M(1;4)\ hay\ M\left(\frac{1}{7};\frac{22}{7}\right)}$

Câu 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 2AC, phương trinh đường thẳng chứa cạnh AC là $2x+y-2=0$, điểm $G\left(2;\frac{4}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết A có hoành độ lớn hơn $\frac{1}{2}$.

(*Trích đề thi thử khối B, THPT Chuyên Bắc Ninh, năm 2013*)

☺ **Nhận xét và ý tưởng :**



_ Bài toán có thể phân tích theo hai hướng sau:

+ **Hướng thứ 1**: Tham số hóa tọa độ A và C theo AC và thông qua trọng tâm G ta biểu diễn tọa độ B theo A và C. Khi đó ta có 2 ẩn nên cần 2 phương trình gồm có pt (1) là AB = 2AC, pt (2) là $AB\perp AC$

+ **Hướng thứ 2**: Viết phương trình AG qua G vào khuyết vecto pháp tuyến của AG. Ta tìm vecto pháp tuyến đó thông qua quan hệ góc $\angle AGC=\angle BCA$ do đã có tỉ lệ cạnh AB = 2AC. Khi viết được phương trình AG ta dễ dàng tìm được tọa độ điểm $A=AC\cap AG$. Đến đây ta có thể lập tiếp phương trình AB qua A vuông góc AC. Sử dụng công thức trọng tâm G (ngầm ẩn 2 phương trình) và tham số hóa B theo AB, C theo AC để giải tìm tọa độ điểm B và C.

► **Hướng dẫn giải:**

* Ta có AB = 2AC nên $\cos\angle GAC=\cos\angle ACB=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Đường thẳng AG đi qua G có vecto pháp tuyến $\vec{n}=(a;b),\ (a^2+b^2>0)$ nên có phương trình:

$$\boxed{AG: a(x-2)+b\left(y-\frac{4}{3}\right)=0}$$

* Mặt khác $\cos\angle GAC=\cos(\text{AG;AC})\Leftrightarrow\frac{|2a+b|}{\sqrt{5}\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow 3a^2+4ab=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\3a=-4b\end{array}\right.$

* Với a = 0, ta chọn b = 1 $\Rightarrow AG: y-\frac{4}{3}=0.$

Khi đó tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} y-\dfrac{4}{3}=0 \\ 2x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3}\right)}$ (loại do $x_A > \dfrac{1}{2}$)

* Với 3a = -4b, ta chọn b = -3 nên a = 4 $\Rightarrow AG: 4x-3y-4=0.$

Khi đó tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4x-3y-4=0. \\ 2x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(1;0)}$ (nhận do $x_A > \dfrac{1}{2}$)

* Phương trình AB qua A và vuông góc AC nên có dạng: $\boxed{AB: x-2y-1=0}$

Khi đó $\begin{cases} B\in AB \\ C\in AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(2b+1;b) \\ C(c;2-2c) \end{cases}.$

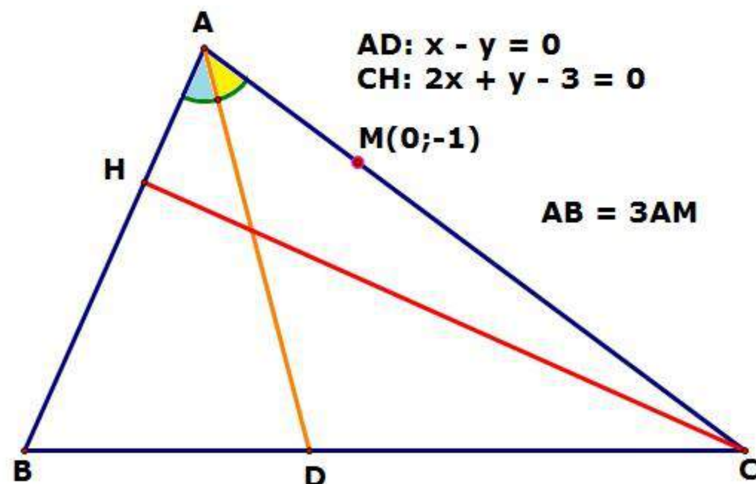
Mặt khác G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có $\begin{cases} 2+2b+c=6 \\ b+2-2c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(5;2) \\ C(0;2) \end{cases}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(1;0), B(5;2), C(0;2)}$

Câu 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác *ABC*, đường phân giác trong của góc *A* và đường cao kẻ từ đỉnh *C* lần lượt có phương trình $x-y=0$, $2x+y-3=0$. Đường thẳng *AC* đi qua điểm *M(0; -1)*, biết $AB=3AM$. Tìm tọa độ đỉnh *B*.

(*Trích đề thi thử lần 1, THPT Chu Văn An, Hà Nội, năm 2014*)

☺ **Nhận xét và ý tưởng :**



_ Dựa vào tính chất của đường phân giác ta tìm thêm được điểm mới N là điểm đối xứng của M qua phân giác AD.

_ Khi đó ta dễ dàng viết được phương trình AB qua N và AB vuông góc HC. Và đồng thời tìm được tọa độ của điểm A thỏa $A=AD\cap AB$

_ Dữ kiện còn lại mà ta chưa dùng đó là $AB=3AM$, ngầm ẩn của dữ kiện này là độ dài vì vậy ta tính cụ thể độ dài AM để suy ra độ dài AB.

_ Đến đây ta có thể mã hóa tọa độ điểm B theo đường AB và liên hệ với độ dài AB để giải tìm tọa độ B.

► **Hướng dẫn giải :**

* Đặt $AD: x-y=0, CH: 2x+y+3=0$.

Gọi M' là điểm đối xứng với M qua đường phân giác AD $\Rightarrow M'\in AB$. Ta tìm được $M'(-1;0)$.

* Đường thẳng AB qua *M'* và vuông góc với CH nên có pt $AB: x-2y+1=0$

$A=AB\cap AH$ nên tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-y=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(1;1)}$

* Theo đề bài, ta có: $AB=3AM \Leftrightarrow AB=3\sqrt{5} \Rightarrow$ B thuộc đường tròn (C') tâm A bán kính $R=3\sqrt{5}$

$(C'): (x-1)^2+(y-1)^2=45$.

* $B = AB \cap (C') \Rightarrow$ tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ (x-1)^2+(y-1)^2=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-5 \\ y=-2 \end{cases}$

Vậy tọa độ điểm B cần tìm là : $\boxed{B(7;4)\ hay\ B(-5;-2)}$

Câu 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip *(E)*: $4x^2+9y=36$ có hai tiêu điểm F_1, F_2 lần lượt nằm phía bên trái và bên phải của điểm *O*. Tìm tọa độ điểm *M* thuộc *(E)* sao cho $MF_1^2+2MF_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

(*Trích đề thi thử lần 1, THPT Chu Văn An, Hà Nội, năm 2014*)

► **Hướng dẫn giải :**

* (E): $4x^2+9y=36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow \begin{cases} a^2=9 \\ b^2=4 \\ c^2=a^2-b^2=5 \end{cases}$

* Giả sử $M(x_0;y_0)\in(E)$,ta có $\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{4}=1$,với $-3\le x_0\le 3$, ta có $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$

Ta đặt $P=MF_1^2+2MF_2^2=(a+ex_0)^2+2(a-ex_0)^2=3a^2-2aex_0+3e^2x_0^2$

Nên P $=27-2.3.\frac{\sqrt{5}}{3}x_0+3.\frac{5}{9}x_0^2=\frac{5}{3}\left(x_0^2-2.\frac{3}{\sqrt{5}}x_0^2+\frac{81}{5}\right)$

* Xét $f(x_0)=x_0^2-2.\frac{3}{\sqrt{5}}x_0+\frac{81}{5}$ trên đoạn $[-3;3]$ có $f'(x_0)=2x_0-\frac{6}{\sqrt{5}}$

$f'(x_0)=0\Leftrightarrow x_0=\frac{3}{\sqrt{5}}$. Lập BBT của hàm số $f(x_0)$ trên $[-3;3]$

* Từ bảng biến thiên ta có: $\min\limits_{x_0\in[-3;3]} f(x_0)=f\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)=\frac{108}{5}\Rightarrow \min P=\frac{5}{3}.\frac{108}{5}=36$

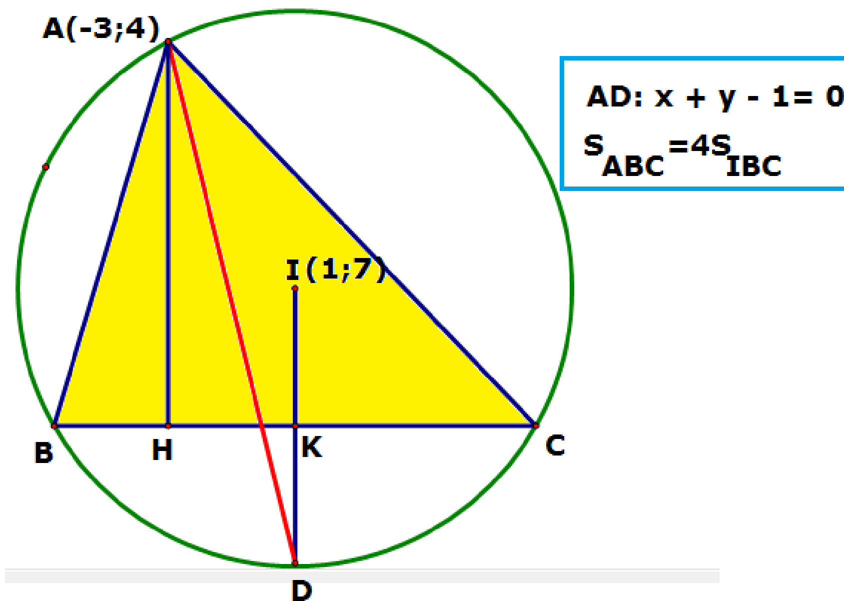
* Vậy $\min P=36$ khi $x=\frac{3}{\sqrt{5}}$ khi đó $M\left(\frac{3}{\sqrt{5}};\pm\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$

Vậy yêu cầu bài toán tương đương với $\boxed{M\left(\frac{3}{\sqrt{5}};\pm\frac{4}{\sqrt{5}}\right),\ \min P=36}$

Câu 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(-3;4)$, đường phân giác trong góc A có phương trình $x+y-1=0$ và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I(1;7)$. Viết phương trình cạnh BC, biết diện tích tam giác ABC gấp 4 lần diện tích tam giác IBC.

(*Trích đề thi thử lần 1, THPT Đoàn Thượng, Hải Dương, năm 2014*)

☺ **Nhận xét và ý tưởng :**



_ Với tính chất đặc biệt của phân giác trong ta có giao điểm của phân giác AD cắt đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC chính là điểm giữa cung nhỏ BC.

_ Khi đã tìm được tọa độ D thì việc gọi dạng của phương trình BC rất dễ dàng.

_ Từ quan hệ diện tích giữa 2 tam giác ABC và IBC ta chuyển về quan hệ khoảng cách từ A và I đến BC. Từ đây tìm được đường BC. $S_{ABC} = 4S_{IBC} \Leftrightarrow d[A;BC] = 4d[I;BC]$

▶ **Hướng dẫn giải:**

* Ta có: IA = 5. Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có dạng:

$$(C): (x-1)^2 + (y-7)^2 = 25$$

* Gọi D là giao điểm thứ hai của đường phân giác trong góc A với đường tròn (C). Tọa độ D thỏa mãn:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-7)^2 = 25 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D(-2;3)}$$

* Vì AD là phân giác trong của góc A nên D là điểm chính giữa cung nhỏ BC. Do đó $ID \perp BC$ hay đường thẳng BC nhận $\overrightarrow{DI} = (3;4)$ làm vecto pháp tuyến. Do đó phương trình cạnh BC là:

$$\boxed{BC: 3x + 4y + m = 0}$$

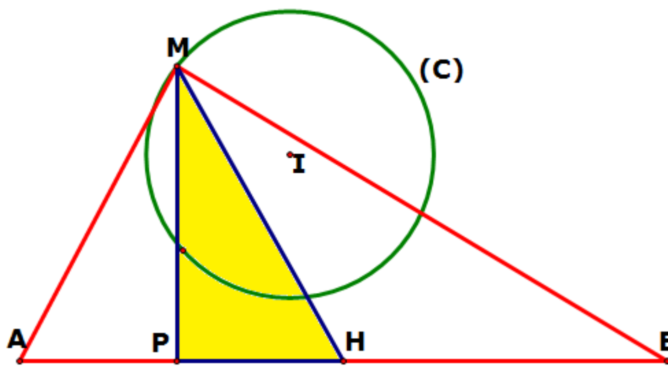
* Do $S_{ABC} = 4S_{IBC} \Leftrightarrow d[A;BC] = 4d[I;BC] \Leftrightarrow \frac{|7+m|}{5} = \frac{|31+m|}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{-114}{3} \\ m = \frac{-131}{5} \end{array}\right.$

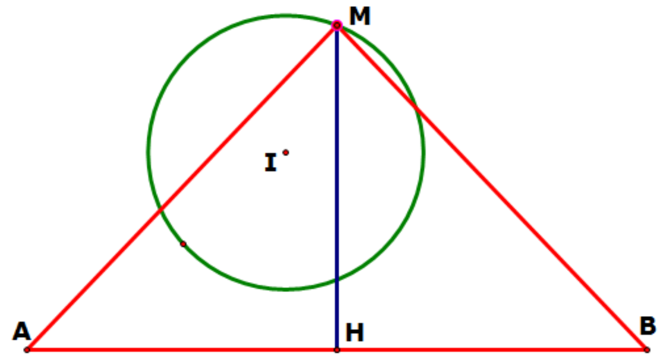
Vậy phương trình BC là $\boxed{9x + 12y - 114 = 0 \text{ hay } 15x + 20y - 131 = 0}$

Câu 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - x - 4y - 2 = 0$ và các điểm $A(3;-5), B(7;-3)$. Tìm điểm M trên đường tròn (C) sao cho $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(*Trích đề thi thử lần 1, THPT Yên Thành 2, Nghệ An, năm 2012*)

☺ **Nhận xét và ý tưởng :**





_ Với bài toán max – min thì trong ba hướng tư duy ta có thể vận dụng bằng cách chuyển biểu thức đang cần tìm max – min sang một biểu thức khác tương dễ thực hiện hơn.

_ Ở đây $MA^2 + MB^2 = 2MH^2 + \frac{AB^2}{2}$. Như vậy yêu cầu bài toán tương đương với MH đạt giá trị nhỏ nhất.

► **Hướng dẫn giải :**

* Đường tròn (C) có tâm $I\left(\frac{1}{2};2\right)$, $R = \frac{5}{2}$.

Gọi H là trung điểm AB suy ra $H(5;-4)$

* Xét tam giác MAB ta có: $MA^2 + MB^2 = 2MH^2 + \frac{AB^2}{2}$

Nhận xét A, B, H đều là các điểm cố định. Vì vậy $\left(MA^2 + MB^2\right)_{\min} \Leftrightarrow \left(MH^2\right)_{\min}$

Hay M là giao điểm của IH với (C)

* $IH: \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -4 - 4t \end{cases} (t \in R)$, thay vào phương trình đường tròn ta được:

$$t^2 + 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \Rightarrow M(2;0) \\ t = -2 \Rightarrow M(-1;4) \end{array}\right..$$

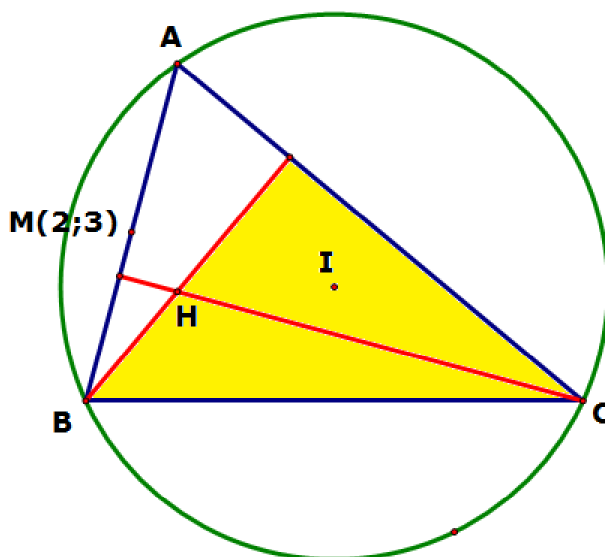
Xét khoảng cách từng điểm M tìm được đến AB ta nhận M(2; 0)

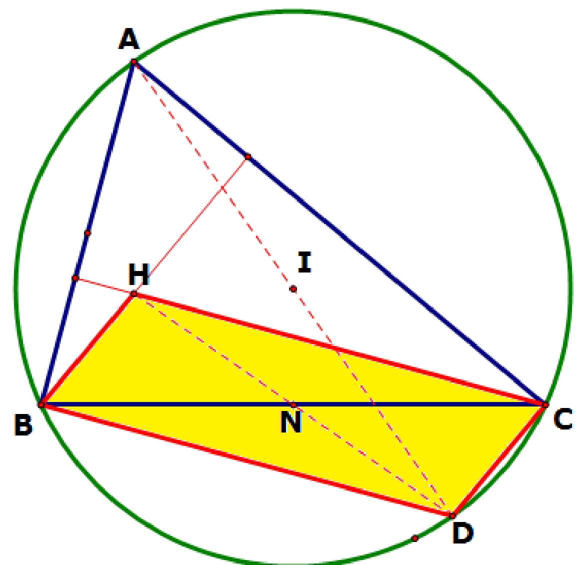
Vậy tọa độ điểm M cần tìm là $\boxed{M(2;0)}$

Câu 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm H. Biết đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $x^2 + y^2 - 3x - 5y + 6 = 0$, H thuộc đường thẳng $d: 3x - y - 4 = 0$, tọa độ trung điểm AB là $M(2;3)$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác biết hoành độ của A lớn hơn 1.

(*Trích đề thi thử THPT Hàm Rồng, Thanh Hóa, năm 2013*)

☺ **Nhận xét và ý tưởng :**





_ Dựa vào cách dựng tâm ngoại (giao điểm giữa các đường trung trực các cạnh tam giác) do đó ta có thể viết phương trình AB qua M và AB vuông góc MI (với I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

_ Khi đó A, B chính là giao điểm giữa đường tròn (C) và đường thẳng AB. Vấn đề còn lại tìm tọa độ điểm C như thế nào ?

_ Vẽ đường kinh AD theo bổ đề đã chứng minh ở chương 1 ta có BHCD là hình bình hành và N là trung điểm của HD và BC. (dữ kiện cuối cùng chưa dùng là H thuộc đường d). Ta đặt tọa độ C(a; b) (2 ẩn nên cần 2 phương trình)

+ **Phương trình (1)** là C thuộc đường tròn (C)

+ **Phương trình (2)** là khi biểu diễn tọa độ N theo tọa độ C và biểu diện tọa độ H theo N. Cho H thuộc đường thẳng d.

► **Hướng dẫn giải :**

* Ta có tâm $I\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$. Do IM vuông góc AB nên AB nhận $\overrightarrow{IM}$ làm vecto pháp tuyến nên AB có dạng:

$$\boxed{AB: x+y-5=0}$$

* Tọa độ A và B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2+y^2-3x-5y+6=25 \\ x+y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(3;2), B(1;4)}$$

* Gọi $C(a;b)$, tọa độ trung điểm N của BC là $N\left(\frac{a+1}{2};\frac{b+4}{2}\right)$

Gọi D là điểm đối xứng với A qua I suy ra BHCD là hình binh hanh nên N là trung điểm HD.

Tọa độ của D(0; 3), ta có $H(a+1;b+1)$

* Do đó H thuộc đường thẳng 3x – y – 4 = 0 nên $3(a+1)-(b+1)-4=0 \Leftrightarrow 3a-b-2=0$

Mặt khác C thuộc đường tròn (C) nên ta C thỏa hệ:

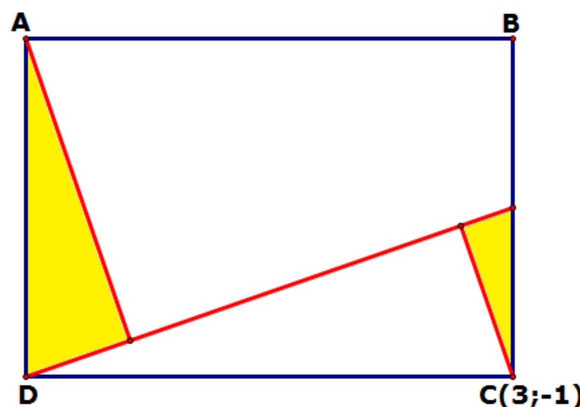
$$\begin{cases} a^2+b^2-3a-5b+6=25 \\ 3a-b-2=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l} C(1;1) \\ C(2;4) \end{array}\right.}$$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là: $\boxed{\left[\begin{array}{l} A(3;2), B(1;4), C(1;1) \\ A(3;2), B(1;4), C(2;4) \end{array}\right.}$

Câu 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có đỉnh C(3;-1). Gọi M là trung điểm của cạnh BC, đường thẳng DM có phương trình là $y-1=0$. Biết đỉnh A thuộc đường thẳng $5x-y+7=0$ và D có hoành độ âm. Tìm tọa độ các đỉnh A và D.

(Trích đề thi thử lần 1, THPT Hồng Quang, Hải Dương, năm 2014)

☺ **Nhận xét và ý tưởng :** (bạn đọc có thể xem lại bài toán 6 – hình chữ nhật, chủ đề 2.1, chương 2 để hiểu rõ hơn)



► **Hướng dẫn giải :**

* Ta có $DM: y-1=0$ và $d(C,DM)=|-1-1|=2$

$$\frac{d(C,DM)}{d(A,DM)}=\frac{IC}{IA}=\frac{MC}{DA}=\frac{1}{2}\Rightarrow d(A,DM)=2d(C,DM)=4$$

* Điểm A thuộc đường thẳng $5x-y+7=0$ nên $A(a;5a+7)$

$$d(A,DM)=4\Leftrightarrow|5a+7-1|=4\Leftrightarrow|5a+6|=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5a+6=4\\5a+6=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-\frac{2}{5}\\a=-2\end{array}\right.$$

* Với $a=-2\Rightarrow A(-2;-3)$. Với $a=-\frac{2}{5}\Rightarrow A\left(-\frac{2}{5};5\right)$.

Điểm $A(-2;-3)$ và $C(3;-1)$ cùng phía so với đường thẳng $DM: y-1=0$

Nên loại điểm $A(-2;-3)$. Vậy $\boxed{A\left(-\frac{2}{5};5\right)}$

* $D\in DM\Rightarrow D(d;1)\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AD}=\left(d+\frac{2}{5};-4\right)\\\overrightarrow{CD}=(d-3;2)\end{cases}$

Do $AD\perp CD\Rightarrow\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}=0\Leftrightarrow\left(d+\frac{2}{5}\right)(d-3)-8=0\Leftrightarrow d^2-\frac{13}{5}d-\frac{46}{5}=0$

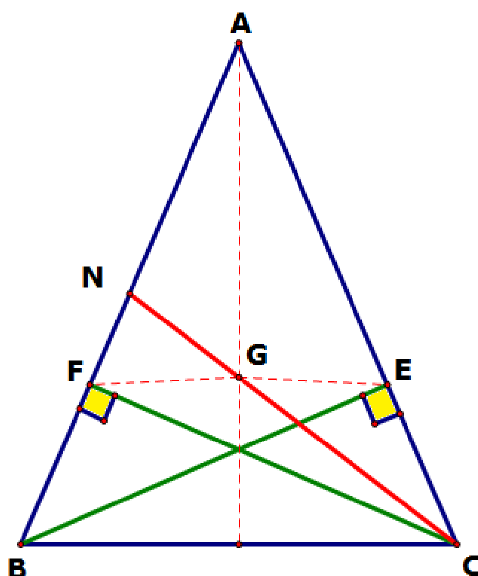
$\Leftrightarrow 5d^2-13d-46=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=-2\\d=\frac{23}{5}\end{array}\right.\Leftrightarrow d=-2$ (Vì $x_D<0$). Với $d=-2\Rightarrow\boxed{D(-2;1)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là: $\boxed{A\left(-\frac{2}{5};5\right),D(-2;1)}$

Câu 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại đỉnh A. Gọi N là trung điểm của AB. Gọi E và F lần lượt là chân đường cao hạ từ các định B, C của tam giác ABC. Tìm tọa độ A biết tọa độ các điểm $E(7;1)$, $F\left(\frac{11}{5};\frac{13}{5}\right)$ và phương trình đường thẳng CN là $2x+y-13=0$

(*Trích đề thi thử lần 2, THPT Lương Thế Vinh, Hà Nội, năm 2014*)

☺ **Nhận xét và ý tưởng :**



_ Với các dữ kiện đang có thì ta đặt một câu hỏi có thể "tìm được điểm mới hoặc phương trình mới không ?". Ở đây ta có thể viết phương trình EF song song BC. Tuy nhiên trong các dữ kiện đó thì dữ kiện phương trình đường trung tuyến NC gợi cho ta nhiều suy nghĩ ?

_ Trên đường thẳng hiện có 2 điểm N và C nhưng nếu tham số hóa chúng thì lại không liên hệ được gì với E và F. Nếu gọi G là trọng tâm tam giác ABC thì do tính chất của tam giác ABC cân tại A thì GE = GF (giải phương trình trên giúp tìm được tọa độ điểm G).

_ Đến đây ta có thể viết phương trình AG vuông EF và qua G (nhằm mục đích tham số hóa điểm A). Cùng lúc đó ta có thể tham số C theo NC và dùng công thức trọng tâm G để biểu diễn tọa độ B theo A và C.

_ Như vậy, ta có 2 ẩn phụ thuộc theo A và C vì vậy, ta cần đến 2 phương trình ? (đó là những phương trình nào ?)

+ Phương trình (1): AG vuông góc BC

+ Phương trình (2): EB vuông EC (hoặc FC vuông BF).

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Vì G thuộc CN suy ra $G(g;13-2g)$

Do tam giác ABC cân tại A nên ta có:

$$GE^2 = GF^2 \Leftrightarrow (g-7)^2 + (13-2g-1)^2 = \left(g-\frac{11}{5}\right)^2 + \left(13-2g-\frac{13}{4}\right)^2 \Leftrightarrow g=5 \Rightarrow \boxed{G(5;3)}$$

* Ta có AG vuông góc EF suy ra phương trình AG có dạng tham số là: $\begin{cases} x=5+t \\ y=3+3t \end{cases} (t\in R)$

Do đó $A\in AG \Rightarrow A(5+a;3+3a)$ và $C\in CN \Rightarrow C(c;13-2c)$

Mặt khác G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có:

$$\begin{cases} x_A+x_B+x_C=3x_G \\ y_A+y_B+y_C=3y_G \end{cases} \Rightarrow B(10-a-c;-7-3a+2c)$$

* Ta có $\overrightarrow{BC}=(a+2c-10;3a-4c+20)$. Lại có BC vuông góc AG nên

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{u_{AG}}=0 \Leftrightarrow 1(a+2c-10)+3(3a-4c+20)=0 \Leftrightarrow \boxed{a=c-5}$

Suy ra $B(15-2c;8-c)$ và $\overrightarrow{EB}=(8-2c;7-c)$, $\overrightarrow{EC}=(c-7;12-2c)$

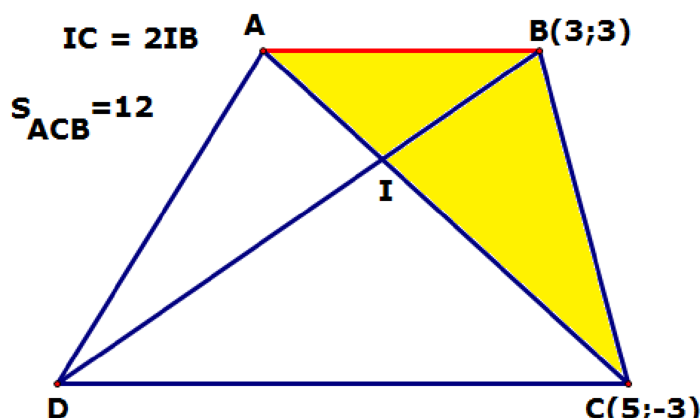
* Vì EB vuông góc EC nên ta có $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EC}=0 \Leftrightarrow (8-2c)(c-7)+(12-2c)(7-c)=0 \Leftrightarrow c=7 \Rightarrow a=2$

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là: $\boxed{A(7;9)}$

Câu 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD với hai đáy là AB và CD biết $B(3;3), C(5;-3)$. Giao điểm I của hai đường chéo nằm trên đường thẳng $\Delta: 2x+y-3=0$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình thang $ABCD$ để $CI=2BI$, tam giác ACB có diện tích bằng 12, điểm I có hoành độ dương và điểm A có hoành độ âm.

(Trích đề thi thử lần 2, THPT Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp, năm 2013)

☺ **Nhận xét và ý tưởng :**



_ Đầu tiên, ta tham số I theo đường thẳng Δ và sử dụng giả thiết IC = 2BI để giải tìm tọa độ điểm I.
_ Đề bài vẫn còn 3 dữ kiện chưa sử dụng đó là diện tích tam giác ACB (1), AB // CD (2), cũng như sự kết hợp giữa các điểm giúp ta tìm thêm điểm mới hoặc đường thẳng mới, đường tròn mới.
_ Ở đây, ta thấy dễ dàng viết được phương trình 2 đường chéo AC và BD. Trong đó vận dụng công thức diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.d(B,AC)$ suy ra độ dài cạnh AC. Đến đây, ta có thể tìm được tọa độ A do A thuộc AC và vận dụng độ dài AC.
_ Khi có tọa độ A thì ta có thể viết phương trình CD qua C và song song AB. Kết hợp với phương trình đường chéo BD để tìm tọa độ D.

► **Hướng dẫn giải:**

* Vì $I \in \Delta \Rightarrow I(t;3-2t), t > 0$

$$CI = 2BI \Leftrightarrow 15t^2 + 10t - 25 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{5}{3}(ktm) \end{array}\right. \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \boxed{I(1;1)}$$

* Phương trình đường thẳng $IC: x + y - 2 = 0$

Mà $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.d(B,AC) = 12 \Rightarrow AC = 6\sqrt{2}$

* Vì $A \in IC \Rightarrow A(a;2-a), a < 0$ nên ta có $(a-5)^2 = 36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 11 \\ a = -1 \end{array}\right. \Rightarrow a = -1 \Rightarrow \boxed{A(-1;3)}$

Phương trình đường thẳng $CD: y + 3 = 0$, $IB: x - y = 0$

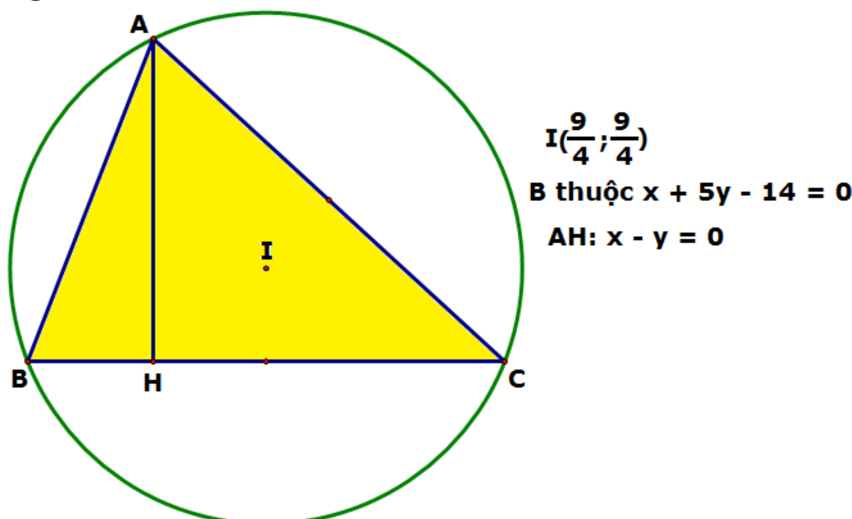
* Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - y = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D(-3;-3)}$

Vậy tọa độ điểm A và D cần tìm là: $\boxed{A(-1;3),\ D(-3;-3)}$

Câu 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đường cao hạ từ đỉnh A có phương trình đường thẳng $x - y = 0$ và điểm $I\left(\frac{9}{4};\frac{9}{4}\right)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp , khoảng cách từ I đến đường thẳng BC bằng $\frac{3\sqrt{2}}{4}$, đường thẳng đi qua đỉnh B có phương trình $x + 5y - 14 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết tung độ của A và B đều không lớn hơn 2.

(*Trích đề thi thử THPT Quỳnh Lưu 3, Nghệ An, năm 2013*)

☺ **Nhận xét và ý tưởng :**



_ Do BC vuông AH nên ta suy ra dạng phương trình của BC: x + y + m = 0. Sử dụng dữ kiện khoảng cách

từ I đến BC ta giải tìm được đường thẳng BC.

_ Khi có phương trình BC ta kết hợp với đường thẳng x + 5y – 14 = 0 để giải tìm tọa độ điểm B.

_ Đặc biệt ta có nhận xét I thuộc đường cao H nên suy ra H là trung điểm BC , từ đây ta có H là giao điểm giữa H và BC và suy ra tọa độ C.

_ Còn với tọa độ điểm A thì chính là giao điểm AH và đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC.

► **Hướng dẫn giải :**

* Đường thẳng BC có phương trình x + y + m = 0.

Theo giả thiết ta có $d(I,BC)=\dfrac{\left|\frac{9}{4}+\frac{9}{4}+m\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow\left|\frac{9}{2}+m\right|=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-6\\m=-3\end{array}\right.$

* Với m = -3, tọa độ đỉnh B thỏa mãn hệ $\begin{cases}x+y=3\\x+5y=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{4}\\y=\frac{11}{4}\end{cases}\Rightarrow\boxed{B\left(\frac{1}{4};\frac{11}{4}\right)}$ (không tm)

* Với m=-6, tọa độ đỉnh B thỏa mãn hệ $\begin{cases}x+y=6\\x+5y=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}\Rightarrow\boxed{B(4;2)}$ (tmbt)

Khi đó phương trình BC: x + y – 6 = 0

* Dễ thấy AI là đường cao của tam giác ABC nên chân đường cao cũng là trung điểm của BC có tọa độ là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-y=0\\x+y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=3\end{cases}\Rightarrow H(3;3)\Rightarrow\boxed{C(2;4)}$.

* Gọi A(a;a) ta có

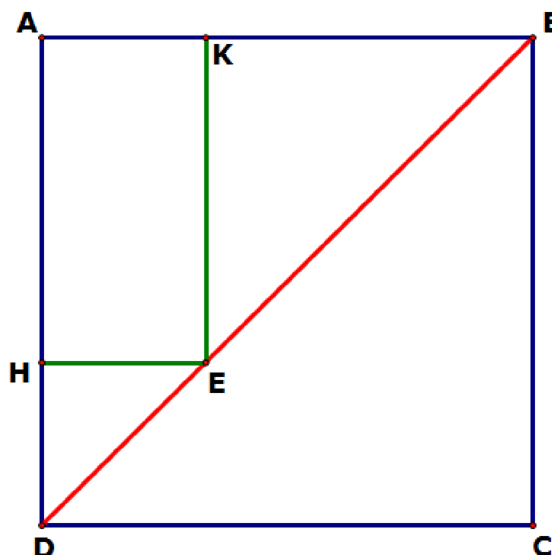
$$IA=IB\Leftrightarrow 2\left(a-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{50}{4}\Leftrightarrow\left|a-\frac{9}{2}\right|=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\frac{7}{2}\Rightarrow A\left(\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right)(\text{không t.m})\\a=1\Rightarrow A(1;1)(\text{t.m})\end{array}\right.$$

Vậy tọa độ các điểm thỏa yêu cầu bài toán là: $\boxed{A(1;1),\ B(4;2),\ C(2;4)}$

Câu 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$. Điểm $E(2;3)$ thuộc đoạn thẳng BD, các điểm $H(-2;3)$ và $K(2;4)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm E trên AB và AD. Xác định toạ độ các đỉnh A,B,C,D của hình vuông $ABCD$.

(***Trích đề thi thử lần 3, THPT Trần Hưng Đạo, Hưng Yên, năm 2014***)

☺ **Nhận xét và ý tưởng :**



_ Dễ thấy AKEH là hình chữ nhật nên ta có thể tìm tọa độ điểm A thông qua trung điểm HK. Hoặc ta cũng có thể lập phương trình AB và AD và tìm giao điểm A.

_ Đến đây ta có thể lập phương trình BD qua E và khuyết vecto pháp tuyến. Để tìm vecto pháp tuyến trong bài toán này khả dĩ nhất là sử dụng góc ABD bằng 45 độ.

_ Khi lập được phương trình BD ta có thể tìm nhanh tọa độ B và D và dễ dàng suy ra tọa độ điểm C.

▶ **Hướng dẫn giải :**

* Ta có EH: y – 3 = 0, EK: x – 2 = 0 suy ra AH: x + 2 = 0, AK: y – 4 = 0.

Khi đó A là giao điểm của AH và AK nên thỏa hệ: $\begin{cases} x+2=0 \\ y-4=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-2;4)}$

* Giả sử $\vec{n}(a;b)$, $(a^2+b^2>0)$ là VTPT của đường thẳng BD.

$$\text{Có: } \widehat{ABD}=45^0 \text{ nên: } \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a=\pm b$$

* Với $a=-b$, chọn $b=-1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow BD: x-y+1=0$

$\Rightarrow B(-2;-1); D(3;4) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{EB}=(-4;-4) \\ \overrightarrow{ED}=(1;1) \end{cases} \Rightarrow E$ nằm trên đoạn BD (thỏa mãn)

Khi đó: $\boxed{C(3;-1)}$

* Với $a=b$, chọn $b=1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow BD: x+y-5=0$.

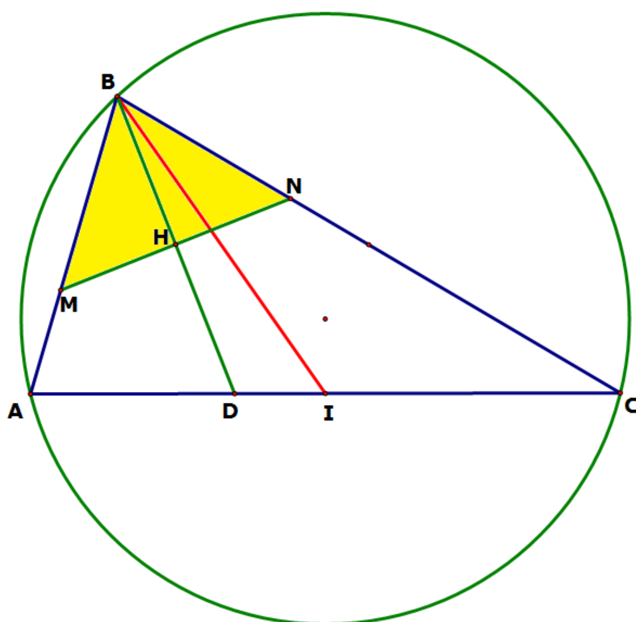
$\Rightarrow B(-2;7); D(1;4) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{EB}=(-4;4) \\ \overrightarrow{ED}=(-1;1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{EB}=4\overrightarrow{ED} \Rightarrow E$ nằm ngoài đoạn BD (loại)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-2;4); B(-2;-1); C(3;-1); D(3;4)}$

Câu 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC, đường trung tuyến kẻ từ đỉnh B và đường phân giác trong của góc ABC lần lượt có phương trình là $x+2y-3=0, x+y-2=0$. Đường thẳng AB đi qua điểm $M(1;2)$, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kinh bằng $\sqrt{5}$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết đỉnh A có tung độ dương.

(*Trích đề thi thử lần 3, THPT Hồng Quang, Hải Dương, năm 2013*)

☺ **Nhận xét và ý tưởng :**



_ Dễ dàng tìm được tọa độ điểm B (do là giao điểm của BD và BI).

_ Tương tự như những bài trước, ta dựa vào tính chất của đường phân giác trong để tìm được điểm mới N. Đồng thời khi đó ta dễ dàng viết đường AB và BC.

_ Khi đó ta tham số hóa điểm A theo đường AB, C theo đường BC. (2 ẩn nên cần 2 phương trình) vậy đó là phương trình nào ?

+ Phương trình (1): Trung điểm I của AC thuộc đường BI

+ Phương trình (2): Phát hiện AB vuông góc BC nên nên ta có $R = \dfrac{AC}{2}$

► Hướng dẫn giải:

* Gọi $d_1 : x + 2y - 3 = 0,\ d_2\ x + y - 2 = 0$.

Ta có: $B = d_1 \cap d_2 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(1;1)}$

* Gọi N là điểm đối xứng của M qua d_2. Điểm M thuộc AB suy ra N thuộc AC.

MN vuông góc d_2 và MN qua M nên có dạng: $x - y + 1 = 0$.

Khi đó $H = MN \cap d_2 \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$.

Do M và N đối xứng qua d_2 nên H là trung điểm MN suy ra $\boxed{N(0;1)} \in AC$

Với các điểm $B(1;1), M(1;2), N(0;1) \Rightarrow \begin{cases} AB : x - 1 = 0 \\ BC : y - 1 = 0 \end{cases}$

* Gọi A(1; a), C(c; 1), tọa độ trung điểm I của đoạn AC là $I\left(\dfrac{1+c}{2}; \dfrac{a+1}{2}\right)$.

Mặt khác I thuộc $d_1 \Rightarrow \dfrac{1+c}{2} + 2\dfrac{a+1}{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow c + 2a - 3 = 0$ (1)

* Ta có: AB vuông góc BC suy ra tam giác ABC vuông tại B

Suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = \dfrac{AC}{2} \Rightarrow (c-1)^2 + (a-1)^2 = 20$ (2).

Từ (1), (2) giải hệ phương trình ta có: $\left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 3 \end{array}\right.$

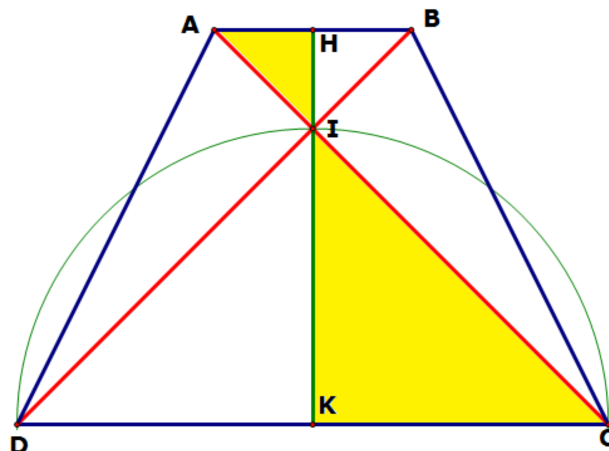
Và do A có tung độ dương nên ta nhận a = 3 suy ra c = - 3

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là: $\boxed{A(1;3), B(1;1), C(-3;1)}$

Câu 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang cân ABCD có diện tích bằng $\dfrac{45}{2}$, đáy lớn CD nằm trên đường thẳng $x - 3y - 3 = 0$. Biết hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau tại $I(2;3)$. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC, biết điểm C có hoành độ dương.

(*Trích đề thi thử lần 2, THPT Tống Duy Tân, Thanh Hóa, năm 2014*)

► Hướng dẫn giải :



* Do ABCD là hình thang cân với đáy lớn CD và hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau nên tam giác ICD vuông cân tại I.

Đường thẳng qua I và vuông góc CD có phương trình:

$$3(x-2)+(y-3)=0 \Leftrightarrow 3x+y-9=0$$

* Gọi K là trung điểm của CD ta có K là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-3y-3=0 \\ 3x+y-9=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{K(3;0)}$$

* Mà KI = KC = KD

Nên CD là giao điểm của đường thẳng CD và đường tròn tâm K bán kinh $KI=\sqrt{10}$.

Do đó tọa độ của chúng la nghiệm của hệ $\begin{cases} x-3y-3=0 \\ (x-3)^2+y^2=10 \end{cases}$

Suy ra C(6;1), D(0;-1) do C có hoành độ dương.

* Gọi H là trung điểm AB, ta có:

$$\frac{45}{2}=S_{ABCD}=\frac{1}{2}(\text{AB}+\text{CD}).\text{HK}=(\text{IH}+\text{IK})\text{HK}=(\text{IH}+\sqrt{10})^2 \Rightarrow IH=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

Mà $\frac{ID}{IB}=\frac{IK}{IH}=2 \Rightarrow \overrightarrow{DI}=2\overrightarrow{IB} \Rightarrow B(3;5) \Rightarrow \overrightarrow{BC}=(3;-4)$

Vậy phương trình BC: 4(x – 3) + 3(y – 5) = 0 $\Leftrightarrow 4x+3y-27=0$

Vậy phương trình đường BC là $\boxed{BC: 4x+3y-27=0}$

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ và đường thẳng $d: 3x+4y-12=0$ cắt (E) tại hai điểm A, B. Tìm tọa độ điểm C thuộc (E) sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

(*Trích đề thi thử lần 2, THPT Tống Duy Tân, Thanh Hóa, năm 2014*)

► **Hướng dẫn giải :**

* Hoành độ giao điểm của đường thẳng Δ và elip (E) là nghiệm phương trình:

$$9x^2+16\left(\frac{12-3x}{4}\right)^2=144 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$$

* Như vậy Δ và elip (E) cắt nhau tại hai điểm A(0;3) và B(4; 0) có AB = 5.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên Δ thì $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.CH=\frac{5}{2}CH$

Vì vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất khi CH lớn nhất.

* Vì C thuộc (E) nên $\exists t \in \left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $C(4\sin t; 3\cos t)$

Do đó HC = $\frac{|12\sin t+12\cos t-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{12}{5}\left|\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-1\right| \le \frac{12(\sqrt{2}+1)}{5}$

* Dấu đẳng thức xảy ra khi $t=\frac{-3\pi}{4}$, khi đó $C\left(-2\sqrt{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

Vậy tọa độ điểm C cần tìm là $\boxed{C\left(-2\sqrt{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)}$

Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A(0;3) và hai điểm B, C thuộc đường tròn $(C): x^2+y^2=9$. Hãy tìm tọa độ B, C biết rằng tam giác ABC có diện tích lớn nhất và điểm B có hoành độ dương.

(*Trích đề thi thử lần 1, THPT Hà Huy Tập, Nghệ An, năm 2014*)

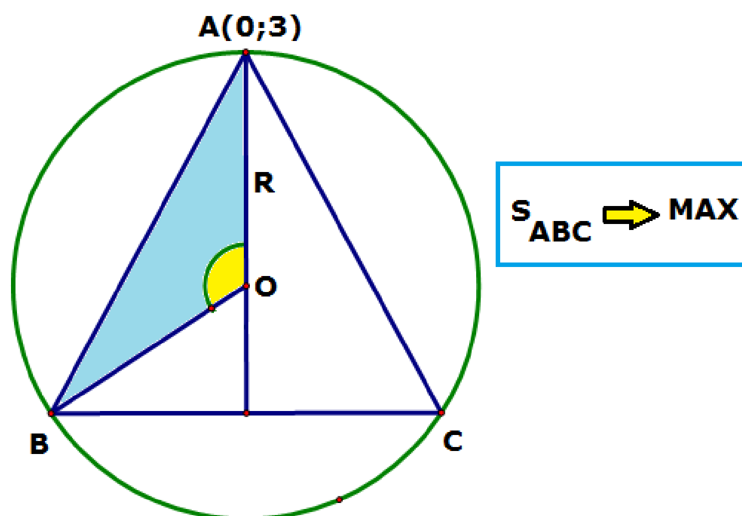
▶ **Hướng dẫn giải:**

* Đường tròn (C) có tâm O(0;0), bán kính R = 3. Dễ thấy A thuộc (C).

Đặt góc BOA = góc COA = x, $0 < x < \pi$

Khi đó, diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC} = 2S_{AOB} + S_{BOC} = R^2 \sin x - \frac{1}{2} R^2 (\sin 2x)$

Suy ra $S_{ABC} = R^2 \sin x(1 - \cos x) = R^2 \sin^3 \frac{x}{2}.\cos \frac{x}{2}$



* Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{\frac{1}{3}\sin^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\sin^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{4} \geq \sqrt[4]{\sin^6 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}$$

Suy ra $\sin^3 \frac{x}{2}.\cos \frac{x}{2} \leq \frac{1}{16}$, dấu bằng xảy ra khi $\sin^2 \frac{x}{2} = 3.\cos^2 \frac{x}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}$

Vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

* Gọi E là trung điểm BC. Ta có $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AO} \Rightarrow E\left(0; \frac{-3}{2}\right)$. Phương trình BC: $y + \frac{3}{2} = 0$

Tọa độ B, C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = \frac{-3}{2} \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pm 3\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{-3}{2} \end{cases}$

* Vì B có có hoành độ dương nên $B\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{-3}{2}\right), C\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}; \frac{-3}{2}\right)$

Vậy tọa độ thỏa yêu cầu bài toán là: $B\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{-3}{2}\right), C\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}; \frac{-3}{2}\right)$

Câu 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại đỉnh $A(4;-13)$ và phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$. Lập phương trình đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác ABC.

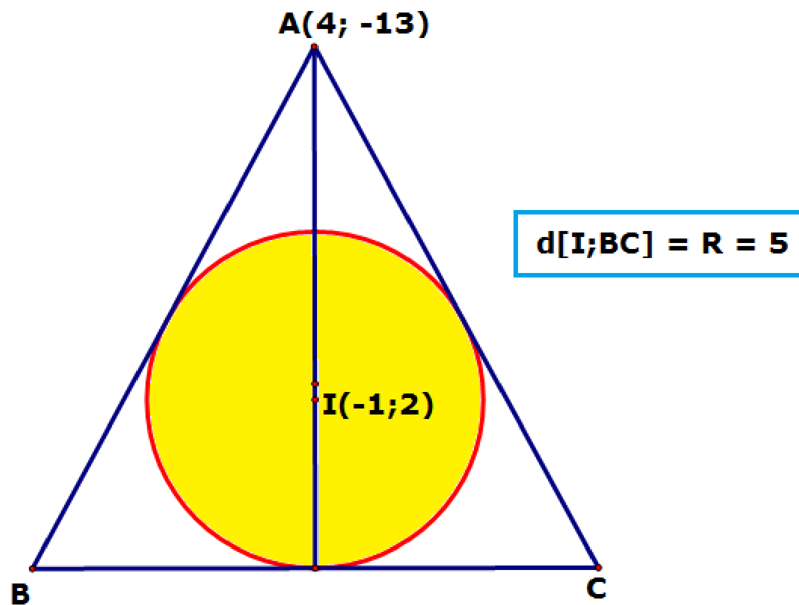
(Trích đề thi thử lần 1 khối B, THPT Chuyên Vĩnh Phúc, năm 2013)

▶ **Hướng dẫn giải :**

* Ta có $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$

Suy ra đường tròn nội tiếp tam giác ABC có tâm I(-1; 2) và bán kính R = 5

* $\overrightarrow{IA} = (5;-15) = 5(1;-3)$, tam giác ABC cân tại đỉnh $A(4;-13) \Rightarrow IA \perp BC$



* BC có phương trình dạng $x-3y+m=0$ Vì I và A nằm cùng phía đối với BC nên

$$(-1-6+m).(4+39+m)>0 \Leftrightarrow (m-7).(m+43)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>7 \\ m<-43 \end{array}\right.$$

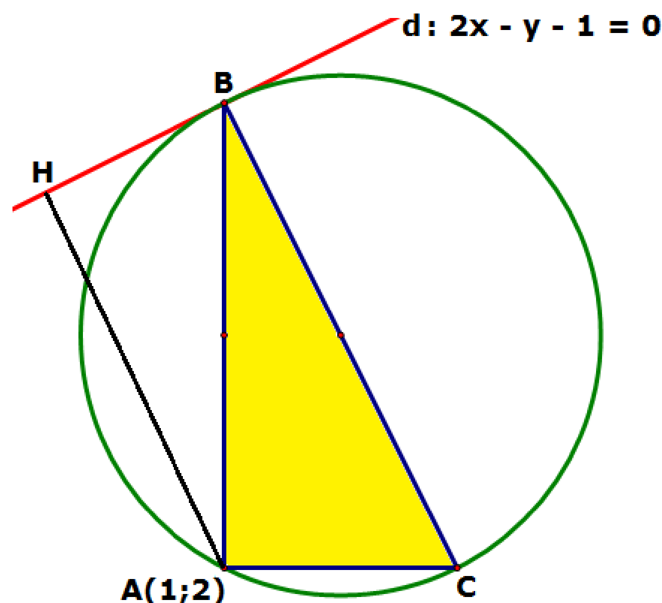
* Vậy $m=7+5\sqrt{10}$ suy ra BC có phương trình $x-3y+7+5\sqrt{10}=0$

Vậy phương trình BC là $\boxed{x-3y+7+5\sqrt{10}=0}$

Câu 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác *ABC* vuông tại $A(1;2)$ có góc $\widehat{ABC}=30^0$, đường thẳng $d:2x-y-1=0$ là tiếp tuyến tại *B* của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*. Tìm tọa độ các điểm *B* và *C*.

(*Trích đề thi thử lần 4, THPT Quế Võ, Bắc Ninh, năm 2013*)

► **Hướng dẫn giải:**



* Gọi H là hình chiếu của A trên d là $H\left(\frac{7}{5};\frac{9}{5}\right)$, $AH=d(A;d)=\frac{1}{\sqrt{5}}$

Tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC là trung điểm BC

d vuông góc BC nên BC//AH suy ra $\widehat{ABH}=60^0$

Suy ra, $HB=\frac{AH}{\tan 60^0}=\frac{1}{\sqrt{15}}$

* Gọi tọa độ của $B(t;2t-1)$

$$BH=\frac{1}{\sqrt{15}}\Leftrightarrow\left(t-\frac{7}{5}\right)^2+\left(2t-\frac{14}{5}\right)^2=\frac{1}{15}\Leftrightarrow\left(t-\frac{7}{5}\right)^2=\frac{1}{75}\Leftrightarrow t=\frac{7}{5}\pm\frac{\sqrt{3}}{15}$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{7}{5}+\frac{\sqrt{3}}{15};\frac{9}{5}+\frac{2\sqrt{3}}{15}\right)\vee B\left(\frac{7}{5}-\frac{\sqrt{3}}{15};\frac{9}{5}-\frac{2\sqrt{3}}{15}\right)$$

* TH1: $B\left(\frac{7}{5}+\frac{\sqrt{3}}{15};\frac{9}{5}+\frac{2\sqrt{3}}{15}\right)$

Phương trình BC qua B vuông góc với d là $x+2y-5-\frac{1}{\sqrt{3}}=0$

$$C\in BC\Rightarrow C\left(5+\frac{1}{\sqrt{3}}-2a;a\right)$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow a=\frac{31+2\sqrt{3}}{15}\Rightarrow C\left(\frac{13+\sqrt{3}}{15};\frac{31+2\sqrt{3}}{15}\right)$$

* TH2: $B\left(\frac{7}{5}-\frac{\sqrt{3}}{15};\frac{9}{5}-\frac{2\sqrt{3}}{15}\right)$

Phương trình BC qua B vuông góc với d là $x+2y-5+\frac{1}{\sqrt{3}}=0$

$$C\in BC\Rightarrow C\left(5-\frac{1}{\sqrt{3}}-2a;a\right)$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow a=\frac{31+2\sqrt{3}}{15}\Rightarrow C\left(\frac{13-\sqrt{3}}{15};\frac{31-2\sqrt{3}}{15}\right)$$

Vậy tọa độ B và C thỏa yêu cầu bài toán là:

$$B\left(\frac{7}{5}+\frac{\sqrt{3}}{15};\frac{9}{5}+\frac{2\sqrt{3}}{15}\right),\ C\left(\frac{13+\sqrt{3}}{15};\frac{31+2\sqrt{3}}{15}\right)\ hay\ B\left(\frac{7}{5}-\frac{\sqrt{3}}{15};\frac{9}{5}-\frac{2\sqrt{3}}{15}\right),\ C\left(\frac{13-\sqrt{3}}{15};\frac{31-2\sqrt{3}}{15}\right)$$

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang vuông ABCD có diện tích bằng 50, đỉnh $C(2;-5)$, $AD=3BC$, biết rằng đường thẳng AB đi qua điểm $M\left(\frac{-1}{2};0\right)$, đường thẳng AD đi qua $N(-3;5)$. Viết phương trình đường thẳng AB biết đường thẳng AB không song song với các trục tọa độ.

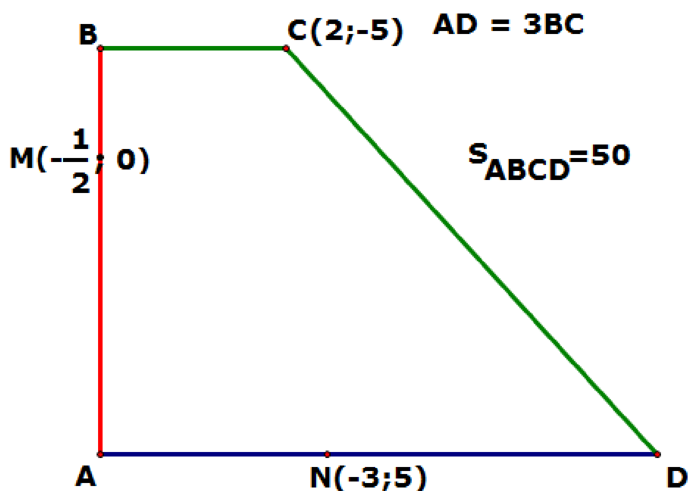
(*Trích đề thi thử lần 2, THPT Chuyên Quốc Học, Thừa Thiên Huế, năm 2013*)

► Hướng dẫn giải :

* Vì AB không song song với các trục tọa độ nên gọi $\vec{n}=(1;b)$ là vecto pháp tuyến của AB. Suy ra vecto pháp tuyến của AD là $\vec{u}=(b;-1)$

* Khi đó: $AB:x+by+\frac{1}{2}=0,\ AD:b(x+3)-(y-5)=0$

* Mặt khác: $S_{ABCD}=50\Leftrightarrow\frac{1}{2}[d(C;AB)+3d(C;AB)].d(C;AD)=50$



Suy ra $d(C;AB).d(C;AD)=25 \Leftrightarrow \dfrac{\left|\frac{5}{2}-5b\right|}{\sqrt{1+b^2}}.\dfrac{|5b+10|}{\sqrt{1+b^2}}=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=\frac{-3}{4}(tm) \\ b=\frac{4}{3}(tm) \\ b=0(ktm)\end{array}\right.$

* Khi đó: AB: 4x – 3y + 2 = 0 và AB: 6x + 8y + 3 = 0

Vậy phương trình AB cần tìm là $\boxed{AB: 4x-3y+2=0 \text{ hay } AB: 6x+8y+3=0}$

Câu 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $x-y=0$ và điểm M(2;1). Lập phương trình đường thẳng Δ cắt trục hoành tại A, cắt đường thẳng d tại B sao cho tam giác AMB vuông cân tại M.

(Trích đề thi thử lần 1 khối D, THPT Chuyên Vĩnh Phúc, năm 2013)

► **Hướng dẫn giải :**

* $\begin{cases} A\in Ox \\ B\in d\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(a;0) \\ B(b;b)\end{cases}$ và M(2;1) suy ra $\begin{cases} \overrightarrow{MB}=(b-2;b-1) \\ \overrightarrow{MA}=(a-2;-1)\end{cases}$

Tam giác MAB vuông cân tại M nên:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MA}=0 \\ MA=MB\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)(b-2)-(b-1)=0 \\ \sqrt{(a-2)^2+1}=\sqrt{(b-2)^2+(b-1)^2}\end{cases}$$

* Nhận xét b = 2 không thỏa mãn hệ phương trình này.

Ta có: $\begin{cases} a-2=\dfrac{b-1}{b-2} \\ (a-2)^2+1=(b-2)^2+(b-1)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2=\dfrac{b-1}{b-2} \\ \left(\dfrac{b-1}{b-2}\right)^2+1=(b-2)^2+(b-1)^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2=\dfrac{b-1}{b-2} \\ [(b-2)^2+(b-1)^2]\left[\dfrac{1}{(b-2)^2}-1\right]=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1\end{cases} hay \begin{cases} a=4 \\ b=3\end{cases}$$

* Với a = 2, b = 1. Đường thẳng qua A, B có phương trình: $x+y-2=0$

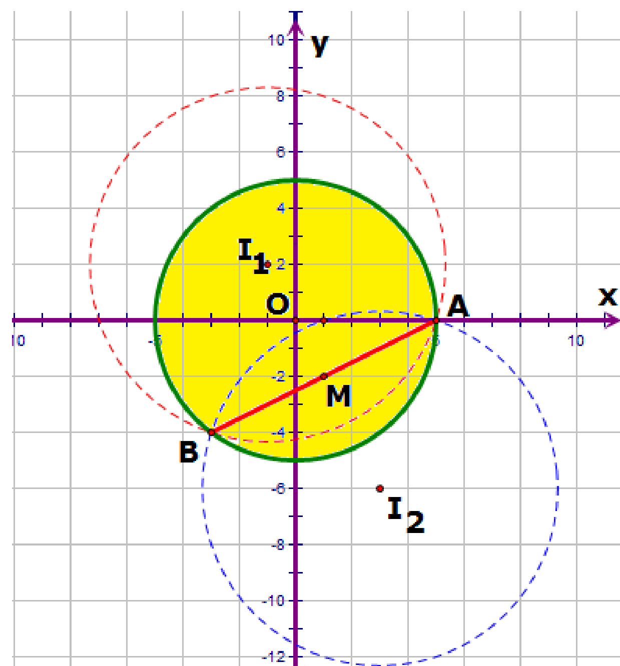
* Với a = 4, b = 3. Đường thẳng qua A, B có phương trình: $3x+y-12=0$

Vậy phương trình đườn thẳng thỏa yêu cầu bài toán là: $\boxed{x+y-2=0 \text{ hay } 3x+y-12=0}$

Câu 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C_1) có phương trình $x^2+y^2=25$, điểm $M(1;-2)$. Đường tròn (C_2) có bán kính bằng $2\sqrt{10}$. Tìm tọa độ tâm của (C_2) sao cho (C_2) cắt (C_1) theo một dây cung qua M có độ dài nhỏ nhất.

(Trích đề thi thử lần 1 khối D, THPT Chuyên Vĩnh Phúc, năm 2013)

► **Hướng dẫn giải:**



* (C_1) có tâm O, bán kính R = 5.

$\overrightarrow{OM}=(1;-2)\Rightarrow OM=\sqrt{5}\Rightarrow OM<R\Rightarrow$ M nằm trong đường tròn (C).

* Giả sử (C_2) cắt (C_1) tại A và B. Gọi H là trung điểm AB.

$AB=2AH=2\sqrt{OA^2-OH^2}=2\sqrt{25-OH^2}$. Mà OH lớn nhất khi H trùng M

Vậy AB nhỏ nhất khi M là trung điểm của AB, AB qua M và vuông góc với OM.

* Phương trình AB : x – 2y – 5 = 0. Tọa độ A, B là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} x-2y-5=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$. Giải hệ được hai nghiệm (5; 0), (-3; -4)

* Giả sử A(5; 0), B(-3; -4). Phương trình OM: 2x + y = 0.

Gọi I là tâm của đường tròn (C_2), do I thuộc OM suy ra $I(t;-2t)$

Mặt khác $IA=2\sqrt{10}\Leftrightarrow(5-t)^2+4t^2=40\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=3 \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} I(-1;2) \\ I(3;-6) \end{array}\right.$

Vậy tọa độ tâm I cần tìm là: $\boxed{I(-1;2)\text{ hay }I(3;-6)}$

Câu 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại C, biết A(1;-2), đường tròn đường kính AC có phương trình $(C): x^2+y^2-6x+4y+9=0$ cắt cạnh AB tại M sao cho $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AM}$. Tìm tọa độ điểm B.

(Trích đề thi thử lần 3 khối D, THPT Hồng Quang, Hải Dương, năm 2013)

► **Hướng dẫn giải :**

* Đường tròn (C) có tâm I(3; -2) và bán kính R = 2.

Vì AC là đường kính của đường tròn (C) nên I la trung điểm AC suy ra C(5; -2)

* Tam giác ABC vuông tại C suy ra AC vuông góc BC.

Đường thẳng BC đi qua C(5; -2) và có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{AC} = (4;0)$ nên có phương trình là:

$$4(x-5)=0 \Leftrightarrow x-5=0$$

* Ta có B thuộc BC nên B(5; b).

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4;b+2),\ \overrightarrow{AM} = (x_M - 1; y_M + 2)$.

Theo giả thiết $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 3(x_M - 1) \\ b+2 = 3(y_M + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{7}{3} \\ y_M = \dfrac{b}{3} - \dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{7}{3}; \dfrac{b}{3} - \dfrac{4}{3}\right)$

* Mặt khác M thuộc đường tròn (C) nên:

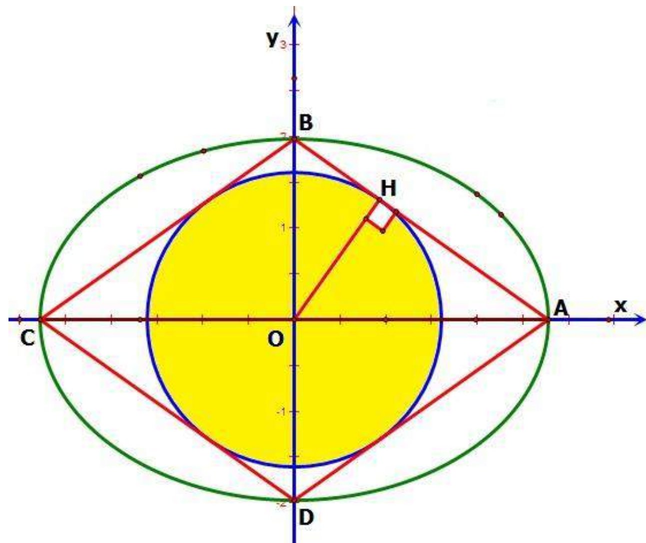
$$\left(\frac{7}{3}-3\right)^2 + \left(\frac{b}{3} - \frac{4}{3} + 2\right)^2 = 4 \Leftrightarrow (b+2)^2 = 32 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 4\sqrt{2} - 2 \\ b = -4\sqrt{2} - 2 \end{array}\right.$$

Vậy tọa độ B cần tìm là : $\boxed{B(5;4\sqrt{2}-2)\ hay\ B(5;-4\sqrt{2}-2)}$

Câu 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có 4 đỉnh trùng với các đỉnh của một elip, bán kính đường nội tiếp hình thoi bằng $\sqrt{2}$. Viết phương trình chính tắc của elip (E), biết tâm sai của elip là $\dfrac{1}{2}$.

(*Trích đề thi thử lần 3, Group Toán 3K Class 2015, Facebook, năm 2013*)

► **Hướng dẫn giải:**



* Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Trong đó a > b > 0 và $a^2 = b^2 + c^2$

* (E) có tâm sai bằng $\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2c = a \Leftrightarrow 4(a^2 - b^2) = a^2 \Leftrightarrow \boxed{3a^2 = 4b^2\ (1)}$

* Đặt R = $\sqrt{2}$ là bán kinh đường tròn nội tiếp hình thoi. Ta có:

$$\boxed{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{R^2} = \frac{1}{2}\ (2)}$$

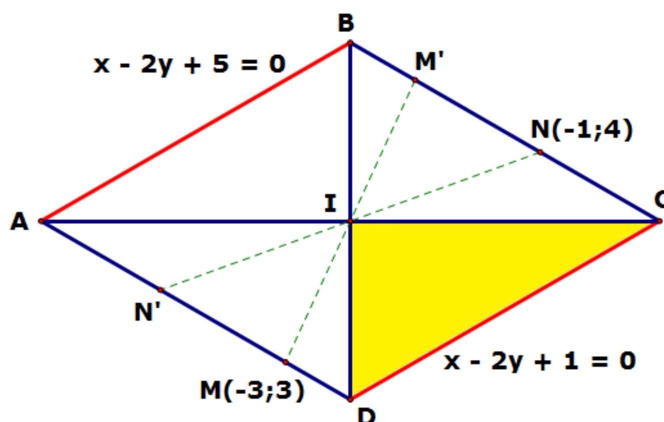
* Thay $a^2 = \dfrac{4b^2}{3}$ vào (2) ta được: $\dfrac{3}{4b^2} + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow b^2 = \dfrac{7}{2} \Rightarrow a^2 = \dfrac{14}{3}$

Vậy phương trình elip (E) cần tìm là: $(E): \frac{x^2}{\frac{14}{3}} + \frac{y^2}{\frac{7}{2}} = 1$

Câu 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi có hai cạnh AB, CD lần lượt nằm trên hai đường thẳng $d_1: x - 2y + 5 = 0,\ d_2: x - 2y + 1 = 0$. Viết phương trình các đường thẳng AD và BC, biết M(-3; 3) thuộc đường thẳng AD và N(-1; 4) thuộc đường thẳng BC.

(*Trích đề thi thử khối A, THPT Chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa, năm 2011*)

▶ **Hướng dẫn giải :**



* Giả sử ta đã xác định được các đường thẳng AD và BC thỏa mãn bài toán.

Đường thẳng AB đi qua điểm E(-5; 0).

Đường thẳng BC đi qua điểm N(-1;4) có phương trình: $a(x+1) + b(y-4) = 0\ (a^2 + b^2 > 0)$

* Mặt khác $S_{ABCD} = AB.d(AB;CD) = BC.d(AD,BC)$

Suy ra $d(AB;CD) = d(AD,BC) \Leftrightarrow d(E;d_2) = d(M;BC) \Leftrightarrow \frac{|-4|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|-2a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Do đó: $11b^2 - 20ab - 4a^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2a \\ 11b = -2a \end{array}\right.$

* Với b = 2a, chọn a = 1 suy ra b = 2.

Khi đó BC: x + 2y – 7 = 0.

Vì AD // BD nên AD: 1(x + 3) + 2(y – 3) = 0 $\Leftrightarrow x + 2y - 3 = 0$

* Với 11b = - 2a, chọn a = 11 suy ra b = - 2.

Khi đó BC: 11x – 2y + 19 = 0

Vì AD // BD nên AD: 11(x + 3) – 2(y – 3) = 0 $\Leftrightarrow 11x - 2y + 39 = 0$

Vậy phương trình đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là

$$\begin{cases} BC: x + 2y + -7 = 0 \\ AD: x + 2y - 3 = 0 \end{cases} hay \begin{cases} BC: 11x - 2y + 19 = 0 \\ AD: 11x - 2y + 39 = 0 \end{cases}$$

Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD, biết các đường thẳng AB, BC, CD, DA tương ứng đi qua các điểm $M(10;3), N(7;-2), P(-3;4), Q(4;-7)$. Lập phương trình đường thẳng AB.

(*Trích đề thi thử khối B, THPT Chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa, năm 2011*)

▶ **Hướng dẫn giải :**

* Gọi vecto pháp tuyến của AB là $\overrightarrow{n_{AB}} = (a;b)(a^2 + b^2 > 0)$ suy ra $\overrightarrow{n_{BC}} = (b;-a)$

Khi đó cạnh của hình vuông bằng $d[P;AB] = d[Q;BC]$ (1)

* AB qua M(10; 3) nên có phương trình: $AB: a(x-10) + b(y-3) = 0$

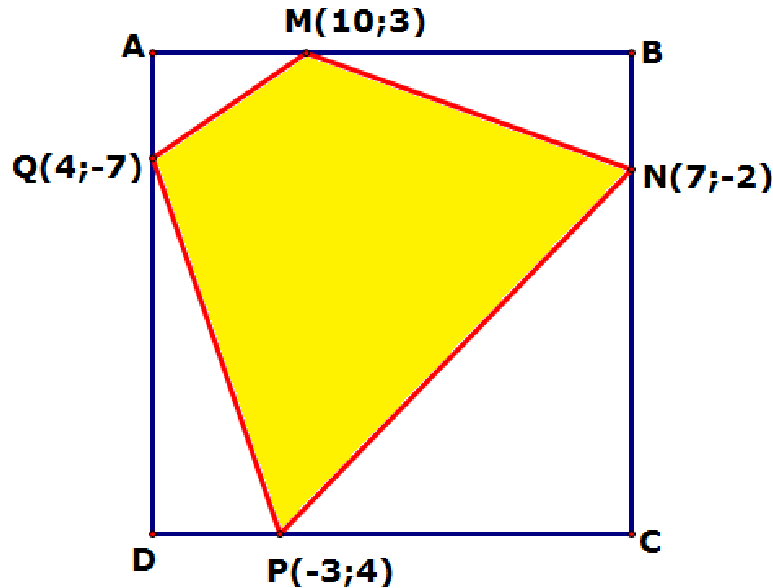
Và BC qua N(7;-2) nên có phương trình: $b(x-7)-a(y+2)=0$

* Do đó (1) $\Leftrightarrow \frac{|-13a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-3b+5a|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 18a=4b \\ b=-4a \end{array}\right.$

* Với 18a = 4b ta chọn a = 2 suy ra b= 9 .Vậy: $\boxed{AB: 2x+9y-47=0}$

* Với b= -4a ta chọn a = 1 suy ra b= -4 .Vậy: $\boxed{AB: x-4y+2=0}$

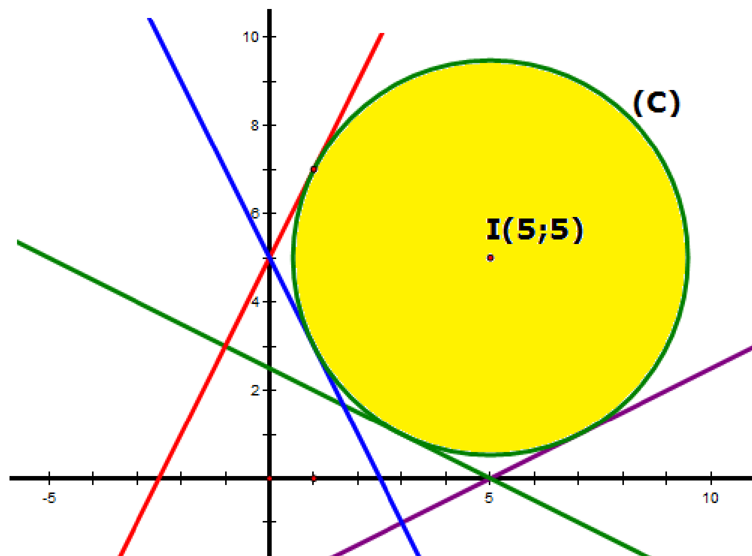
Vậy phương trình AB cần tìm là: $\boxed{AB: 2x+9y-47=0 \text{ hay } AB: x-4y-2=0}$



Câu 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-10x-10y+30=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ tiếp xúc đường tròn (C) sao cho đường thẳng Δ cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B sao cho $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{5}$.

(Trích đề thi thử lần 2, THPT Đặng Thúc Hứa, Nghệ An, năm 2012)

▶ **Hướng dẫn giải :**



* Giả sử $A(a;0)$, $B(0;b)$ $(a;b\neq 0)$. Khi đó phương trình đường thẳng qua A và B có dạng:

$$\Delta: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

* Từ giả thiết ta có hệ phương trình: $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{5} \\ d(I;\Delta)=R \end{array}\right.$

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{5} \\ \dfrac{\left|\dfrac{5}{a}+\dfrac{5}{b}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}}=2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{5} \\ \left|\dfrac{5}{a}+\dfrac{5}{b}-1\right|=2 \end{cases}$

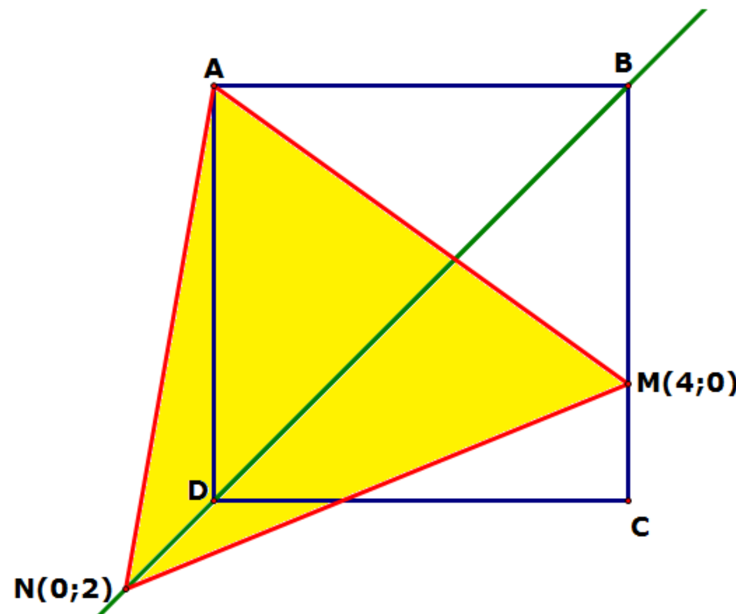
* Khi đó hệ thành $\begin{cases} \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{3}{5} \\ \dfrac{1}{ab}=\dfrac{2}{25} \end{cases}$ *hay* $\begin{cases} \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{-1}{5} \\ \dfrac{1}{ab}=\dfrac{-2}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=\dfrac{5}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} a=\dfrac{5}{2} \\ b=5 \end{cases} \vee \begin{cases} a=\dfrac{-5}{2} \\ b=5 \end{cases} \vee \begin{cases} a=5 \\ b=\dfrac{-5}{2} \end{cases}$

Vậy các phương trình thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $\boxed{\left[\begin{array}{l} x+2y-5=0 \\ 2x+y-5=0 \\ 2x-y+5=0 \\ x-2y-5=0 \end{array}\right.}$

Câu 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có đỉnh A thuộc đường thẳng $d: x-y-4=0$, đường thẳng BC, CD lần lượt đi qua hai điểm $M(4;0)$ và $N(0;2)$. Biết tam giác AMN cân tại A. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD.

(Trích đề thi thử lần 2, THPT Đặng Thúc Hứa, Nghệ An, năm 2012)

► **Hướng dẫn giải :**



* Giả sử A(a; a – 4) thuộc d. Do tam giác AMN cân tại A nên AM = AN.

$$(a-4)^2+(a-4)^2=a^2+(a-6)^2 \Leftrightarrow a=-1 \Rightarrow \boxed{A(-1;-5)}$$

* Giả sử phương trình đường thẳng BC đi qua M(4; 0) có dạng:

$$\boxed{BC: ax+by-4a=0\ (a^2+b^2>0)}$$

Do CD vuông góc BC và đường thẳng CD đi qua N(0; 2) suy ra phương trình đường thẳng CD:

$$\boxed{CD: bx-ay+2a=0}$$

* Do ABCD là hình vuông nên khoảng cách:

$$d(A;BC)=d(A;CD) \Leftrightarrow \frac{|-5a-5b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|7a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a=-b \\ a=3b \end{array}\right.$$

* Với 3a = - b , ta chọn a = 1 suy ra b = - 3.

Khi đó phương trình các cạnh là: $\begin{cases} AB: 3x+y+8=0 \\ BC: x-3y-4=0 \\ CD: 3x+y-2=0 \\ AD: x-3y-14=0 \end{cases}$

Ta có tọa độ các đỉnh $\boxed{A(-1;-5), B(-2;-2), C(1;-1), D(2;-4)}$

* Với a = 3b , ta chọn a = 3 suy ra b = 1.

Khi đó phương trình các cạnh là: $\begin{cases} AB: x-3y-14=0 \\ BC: 3x+y-12=0 \\ CD: x-3y+6=0 \\ AD: 3x+y+8=0 \end{cases}$

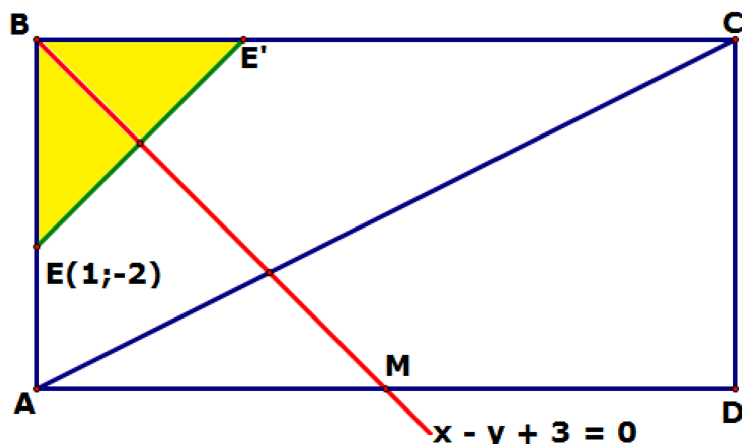
Ta có tọa độ các đỉnh $\boxed{A(-1;-5), B(5;-3), C(3;3), D(-3;1)}$

Vậy tọa độ các điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{\left[\begin{array}{l} A(-1;-5), B(-2;-2), C(1;-1), D(2;-4) \\ A(-1;-5), B(5;-3), C(3;3), D(-3;1) \end{array}\right.}$

Câu 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật *ABCD* có đường phân giác trong của góc ABC đi qua trung điểm của cạnh *AD* và có phương trình x – y + 2 = 0; đỉnh *D* nằm trên đường thẳng có phương trình x + y – 9 = 0. Biết điểm E(-1;2) nằm trong đoạn thẳng *AB* và đỉnh *B* có hoành độ âm. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

(*Trích đề thi thử THPT Nguyễn Huệ, Đắk Lắk, năm 2013*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi $E'(x_o;y_o)$ là điểm đối xứng cua E qua phân giác x – y + 2 = 0 thỏa mãn:

$$\begin{cases} (x_0+1)+(y_0-2)=0 \\ \dfrac{x_0-1}{2}-\dfrac{y_0+2}{2}+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0+y_0=1 \\ x_0-y_0=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ y_0=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{E'(0;1)}$$

* Gọi B(b; b + 2) (b < 0). Do ABCD là hình chữ nhật và E nằm trong đoạn AB nên E' nằm trên đoạn BC suy ra BE vuông góc BE' $\Rightarrow (b+1)b+b(b+1)=0 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow \boxed{B(-1;1)}$

Khi đó phương trình đường thẳng BE là x + 1 = 0 và BE' là y – 1 = 0

* Gọi $A(-1;a)$ $(a \geq 2)$ và $D(d;9-d)$ ta có tọa độ trung điểm của AD là: $M\left(\dfrac{d-1}{2};\dfrac{a+9-d}{2}\right)$

Theo giả thiết ta được: $\dfrac{d-1}{2}-\dfrac{a+9-d}{2}+2=0 \Leftrightarrow a-2d+6=0$ (1)

* Mặt khác AB vuông góc AD nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$ với $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(0;-a) \\ \overrightarrow{AD}=(d+1;a+d-9) \end{cases}$.

Do đó ta có: $a(a+d-9)=0 \Leftrightarrow a+d-9=0$ (2)

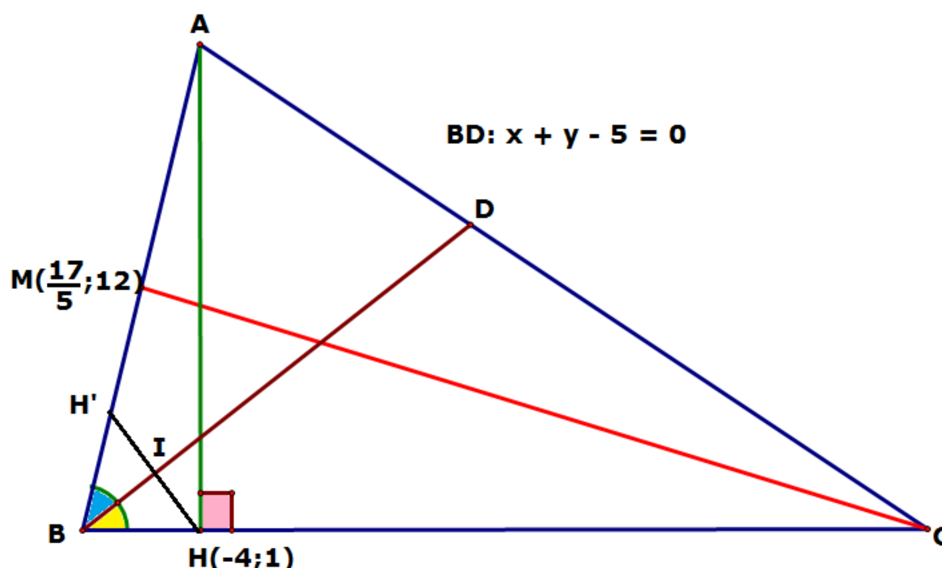
Từ (1) và (2) ta có a = 4 và d = 5 hay A(-1;4) và D(5; 4) suy ra C(5; 1)

Vậy tọa độ các điểm của hình chữ nhật ABCD là: $\boxed{A(-1;4), B(-1;1), C(5;1), D(5;4)}$

Câu 38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đường cao AH, trung tuyến CM và phân giác trong BD. Biết $H(-4;1)$, $M\left(\frac{17}{5};12\right)$ và BD có phương trình $x+y-5=0$. Tìm tọa độ đỉnh A của tam giác ABC.

(*Trích đề thi thử THPT Hậu Lộc 2, Thanh Hóa, năm 2013*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Đường thẳng Δ qua H và ⊥ BD có phương trình $x-y+5=0$.

$\Delta \cap BD = I$ suy ra tọa độ I là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y-5=0 \\ x-y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I(0;5)}$.

* Giả sử $\Delta \cap AB = H'$. Tam giác BHH' có BI là phân giác và cũng là đường cao nên BHH' cân ⇒ I là trung điểm của $HH' \Rightarrow H'(4;9)$.

* AB đi qua H’ và có vecto chỉ phương $\vec{u} = \overrightarrow{H'M} = \left(-\frac{3}{5};3\right)$ nên có phương trình là

$$\boxed{AB: 5x+y-29=0}.$$

* Tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 5x+y=29 \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow B(6;-1)$. M là trung điểm của AB $\Rightarrow \boxed{A\left(\frac{4}{5};25\right)}$

Vậy tọa độ điểm A cần tìm là: $\boxed{A\left(\frac{4}{5};25\right)}$

Câu 39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) : $(x + 6)^2 + (y - 6)^2 = 50$. Đường thẳng d cắt hai trục tọa độ tại hai điểm A, B khác gốc O .Viết phương trình đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C) tại M sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

(*Trích đề thi thử lần 3, Group Toán 3K Class, Facebook, năm 2013*)

► **Hướng dẫn giải :**

* Giả sử $A(a;0)$, $B(0;b)$ $(a;b \neq 0)$. Khi đó phương trình đường thẳng qua A và B có dạng:

$$\Delta: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \Leftrightarrow bx-ay-ab=0$$

* d là tiếp tuyến của (C) tại M ⇔ M thuộc (C) và d vuông góc với IM

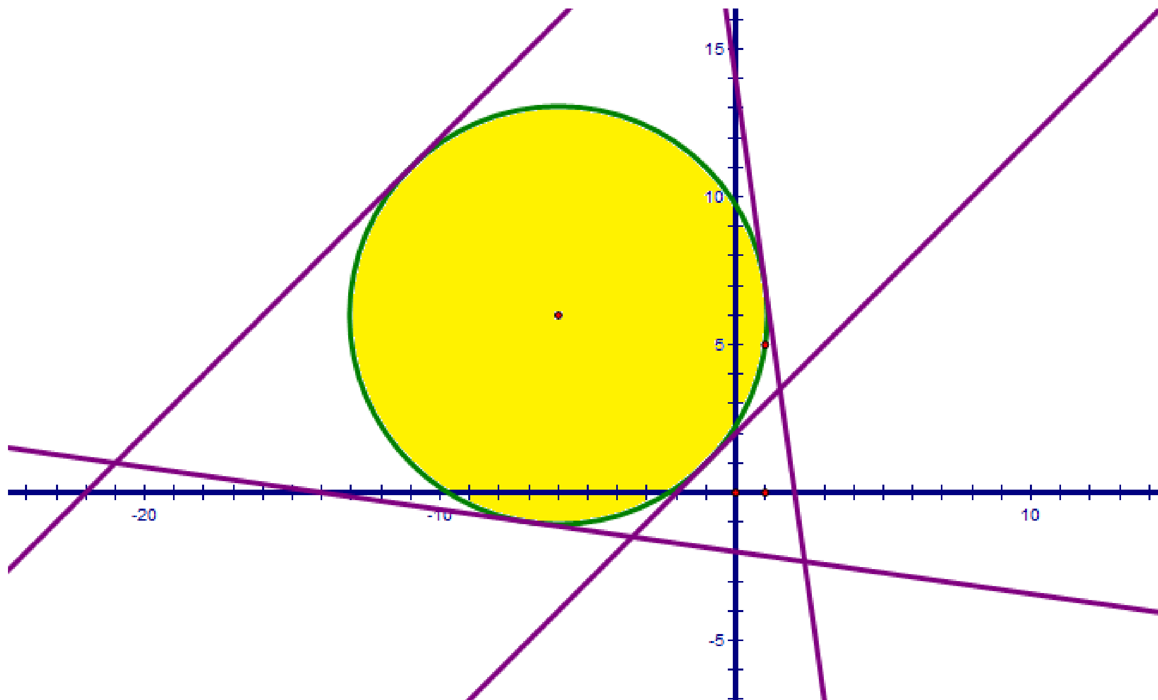
* Đường tròn (C) có tâm I(-6 ; 6) , d có VTCP là $\vec{u} = (-a;b)$

M là trung điểm của AB nêm $M\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$ nên $\overrightarrow{IM} = \left(\frac{a}{2}+6;\frac{b}{2}-6\right)$

Do đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\left(\frac{a}{2}+6\right)^2+\left(\frac{b}{2}-6\right)^2=50\\ -a\left(\frac{a}{2}+6\right)+b\left(\frac{b}{2}-6\right)=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=-b\\ \left(\frac{a}{2}+6\right)^2+\left(\frac{b}{2}-6\right)^2=50\end{cases}\\ \begin{cases}b=a+12\\ \left(\frac{a}{2}+6\right)^2+\left(\frac{b}{2}-6\right)^2=50\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=22\\ a=-22\end{cases}\\ \begin{cases}b=2\\ a=-2\end{cases}\end{array}\right. v \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=14\\ a=2\end{cases}\\ \begin{cases}b=-2\\ a=-14\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đường thẳng d cần tìm là: $\left[\begin{array}{l}x-y+2=0\\ x-y+22=0\\ x+7y+14=0\\ 7x+y-14=0\end{array}\right.$



Câu 40. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, các đỉnh A, B thuộc đường thẳng $y-2=0$, phương trình cạnh BC: $\sqrt{3}x-y+2=0$. Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C biết bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng $\sqrt{3}$.

(*Trích đề thi thử lần 6, Group Toán 3K Class, Facebook, năm 2013*)

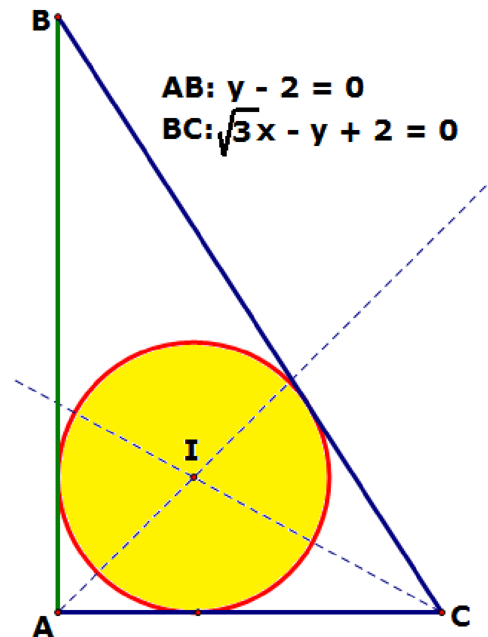
► **Hướng dẫn giải :**

* Toa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases}\sqrt{3}x-y+2=0\\ y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=2\end{cases} \Rightarrow \boxed{B(0;2)}$

* Do A thuộc đường thẳng y – 2 = 0 nên $A(a;2)\,(a \neq 0)$

$C \in BC: \sqrt{3}x-y+2=0 \Rightarrow C(c;2+c\sqrt{3})\,(c \neq 0)$

Vậy $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-a;0) = |a| \\ \overrightarrow{AC} = (c-a;c\sqrt{3}) \Rightarrow AC = \sqrt{(c-a)^2 + 3c^2} \\ \overrightarrow{BC} = (c;c\sqrt{3}) \Rightarrow BC = 2|c| \end{cases}$



* Vì tam giác ABC vuông ở A và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng $\sqrt{3}$ nên:

$$\begin{cases} AB \perp C \\ S = pr = p\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \quad (1) \\ \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{AB + AC + BC}{2}\sqrt{3} \ (2) \end{cases}$$

Từ (1) $\Leftrightarrow -a(c-a) = 0 \Leftrightarrow c = a$ thay vào phương trình (2) ta được: $|a| = 3 + \sqrt{3}$

* Vậy $\left[\begin{array}{l} a = c = 3 + \sqrt{3} \\ a = c = -3 - \sqrt{3} \end{array} \right.$ nên $\left[\begin{array}{l} A(3+\sqrt{3};2), C(3+\sqrt{3};5+3\sqrt{3}) \\ A(-3-\sqrt{3};2), C(-3-\sqrt{3};-1-3\sqrt{3}) \end{array} \right.$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là:

$$\left[\begin{array}{l} A(3+\sqrt{3};2), B(0;2), C(3+\sqrt{3};5+3\sqrt{3}) \\ A(-3-\sqrt{3};2), B(0;2), C(-3-\sqrt{3};-1-3\sqrt{3}) \end{array} \right.$$

Câu 41. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có tâm $I(3;3)$ và $AC = 2BD$. Điểm $M\left(2;\dfrac{4}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB, điểm $N\left(3;\dfrac{13}{3}\right)$ thuộc đường thẳng CD. Viết phương trình đường chéo BD biết đỉnh B có hoành độ nhỏ hơn 3.

(*Trích đề thi thử lần 7, Group Toán 3K Class, Facebook, năm 2013*)

► **Hướng dẫn giải :**

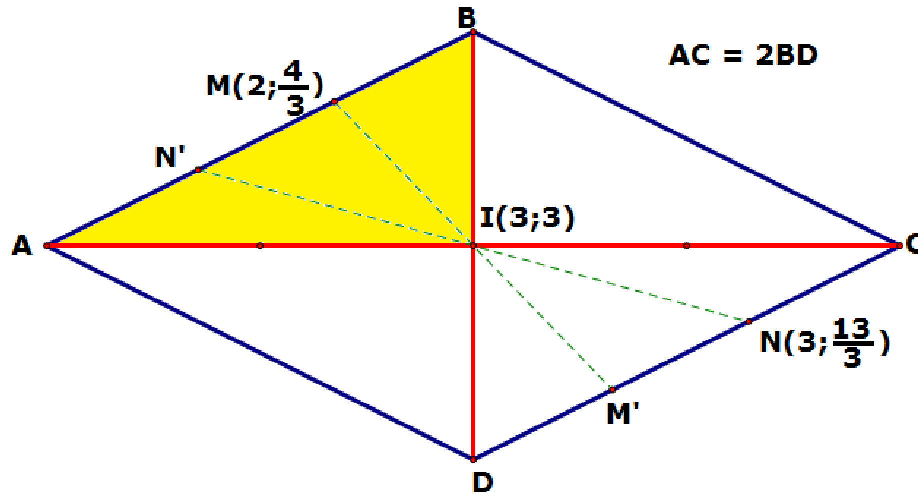
* Tọa độ điểm N' đối xứng với điểm N qua I là $N'\left(3;\dfrac{5}{3}\right)$

Đường thẳng AB đi qua M, N' có phương trình: $x - 3y + 2 = 0$

Suy ra: $IH = d(I, AB) = \dfrac{|3 - 9 + 2|}{\sqrt{10}} = \dfrac{4}{\sqrt{10}}$

* Do $AC = 2BD$ nên $IA = 2IB$. Đặt $IB = x > 0$, ta có phương trình

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x^2} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$



* Đặt $B(x, y)$. Do $IB = \sqrt{2}$ và $B \in AB$ nên tọa độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}(x-3)^2 + (y-3)^2 = 2 \\ x - 3y + 2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5y^2 - 18y + 16 = 0 \\ x = 3y - 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{14}{5} \\ y = \dfrac{8}{5}\end{cases} \vee \begin{cases}x = 4 > 3 \\ y = 2\end{cases}$$

* Do B có hoành độ nhỏ hơn 3 nên ta chọn $B\left(\dfrac{14}{5}; \dfrac{8}{5}\right)$

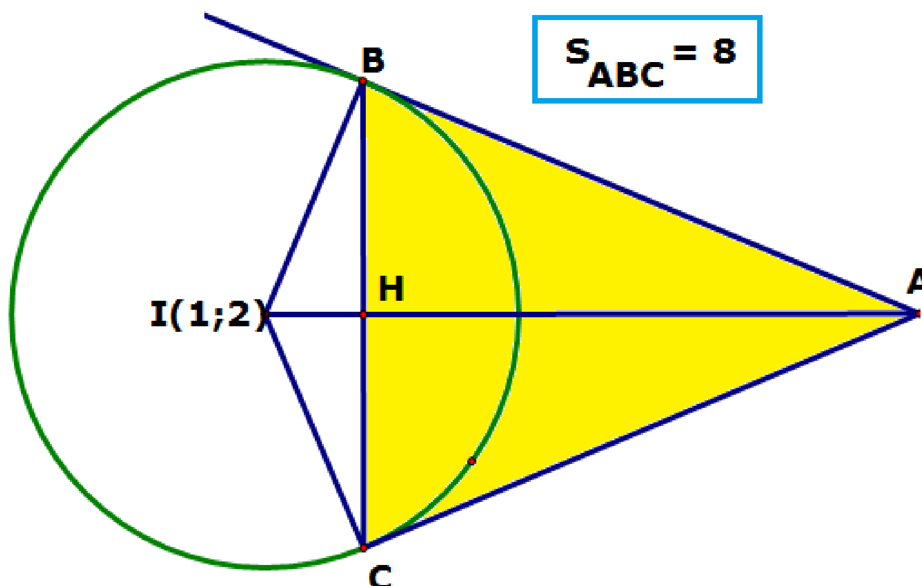
Vậy, phương trình đường chéo BD là: $7x - y - 18 = 0$.

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $\boxed{BD: 7x - y - 18 = 0}$

Câu 42. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ và đường thẳng $d: x + y + 2 = 0$. Từ điểm A thuộc d kẻ hai đường thẳng lần lượt tiếp xúc với (C) tại B và C. Tìm tọa độ điểm A biết rằng diện tích tam giác ABC bằng 8.

(*Trích đề thi thử lần 2 khối A, THPT Chuyên Đại Học Vinh, năm 2013*)

► **Hướng dẫn giải:**



* (C) có tâm I(1; 2) và bán kính $R = \sqrt{5}$. $A \in d \Rightarrow A(a; -a-2)$

Từ tính chất tiếp tuyến suy ra IA vuông góc BC tại H là trung điểm BC.
Giả sử IA = m, IH = n (m > n > 0)

Khi đó $\Rightarrow HA = m - n,\ BH = \sqrt{IB^2 - IH^2} = \sqrt{5 - n^2}$

Suy ra $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AH = BH.AH = (m-n)\sqrt{5-n^2} = 8$ (1)

* Trong tam giác IBA có $IB^2 = IH.IA \Leftrightarrow m.n = 5 \Leftrightarrow m = \frac{5}{n}$

Thay (2) vào (1), ta có:

$$\left(\frac{5}{n} - n\right)\sqrt{5-n^2} = 8 \Leftrightarrow n^6 - 15n^4 + 139n^2 - 125 = 0 \Leftrightarrow (n^2-1)(n^4 - 14n^2 + 125) = 0$$

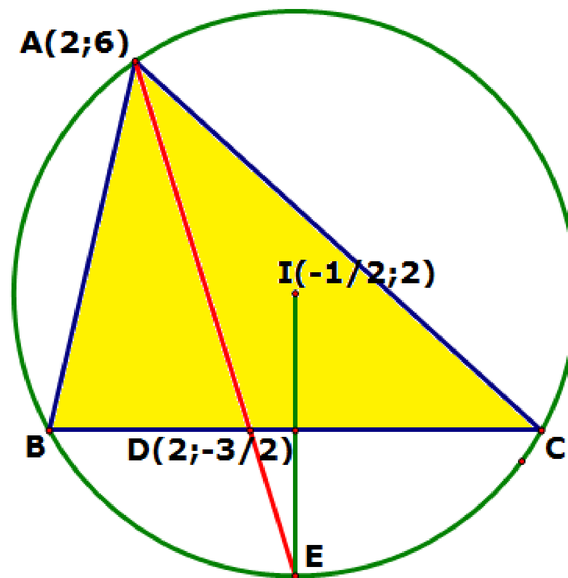
* Suy ra n = 1, m = 5. Do đó IA = 5 $\Leftrightarrow (a-1)^2 + (-a-4)^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(1;-3) \\ A(-4;2) \end{array}\right.$

Vậy tọa độ điểm A thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(1;-3)\ hay\ A(-4;2)}$

Câu 43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(2;6)$, chân đường phân giác trong kẻ từ A là D$\left(2;-\frac{3}{2}\right)$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I\left(-\frac{1}{2};1\right)$. Tìm tọa độ đỉnh B và C.

(***Trích đề thi thử lần 2, THPT Chuyên Quỳnh Lưu 1, Nghệ An, năm 2014***)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là (C) $\Rightarrow (C): \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{125}{4}$

Gọi $E = AD \cap (C)$. Do $\angle BAE = \angle CAE \Rightarrow$ E là điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$

* AD: x – 2 = 0. Tọa độ E là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{125}{4} \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} E(2;-4) \\ E(2;6) \equiv A(loai) \end{array}\right.$$

* E(2;-4) $\Rightarrow \overrightarrow{IE} = \left(\frac{5}{2};-5\right)$.BC đi qua D có vecto pháp tuyến là $\vec{n} = \frac{2}{5}\overrightarrow{IE} = (1;-2) \Rightarrow \boxed{BC: x - 2y - 5 = 0}$

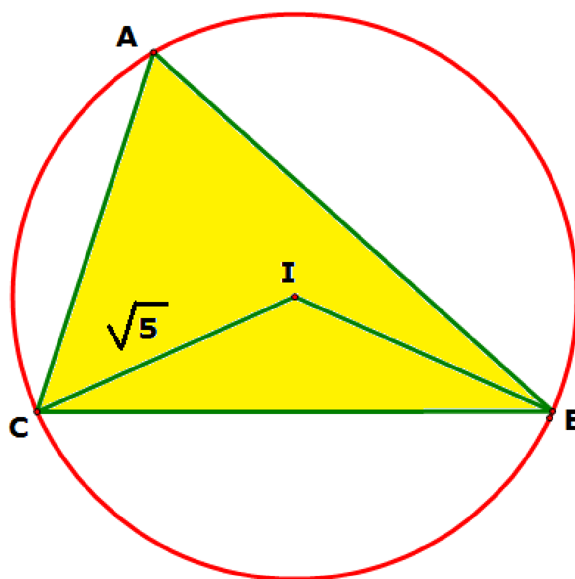
* Tọa độ B và C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{125}{4} \\ x-2y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(5;0), C(-3;-4) \\ C(5;0), B(-3;-4) \end{array}\right.$

Vậy tọa độ B và C thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{\left[\begin{array}{l} B(5;0), C(-3;-4) \\ C(5;0), B(-3;-4) \end{array}\right.}$

Câu 44. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh B(-2; 1), điểm A thuộc trục tung, điểm C thuộc tia Ox và góc BAC bằng 30 độ. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng $\sqrt{5}$. Xác định tọa độ điểm A và C.

(Trích phần cơ bản, đề thi thử THPT Lê Lợi, Quảng Trị, năm 2013)

▶ **Hướng dẫn giải :**



* Ta có: $\begin{cases} A \in Oy \\ C \in tia\, Ox \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(a;0) \\ C(0;c)\,(c \ge 0) \end{cases}$. Ta có $BC = 2R\sin 30^\circ = \sqrt{5}$

Suy ra $BC^2 = 5 \Leftrightarrow (c+2)^2 + (0-1)^2 = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=-4 \end{array}\right.$ (do c > 0) nên ta nhận c = 0

Do đó C trùng với gốc tọa độ O.

* Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm B trên Oy ta có tam giác BHA là một nửa của tam giác đều.

Nên $AB = 2BH \Rightarrow HA = 2\sqrt{3}$. Do đó $A(0;1+2\sqrt{3})$ *hay* $A(0;1-2\sqrt{3})$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(0;1+2\sqrt{3}), B(-2;1), C(0;0) \text{ hay } A(0;1-2\sqrt{3}), B(-2;1), C(0;0)}$

Câu 45. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ và điểm A(1;3). Một đường thẳng d đi qua A, gọi B, C là giao điểm của đường thẳng d với (C). Lập phương trình của d sao cho AB + AC nhỏ nhất.

(Trích phần nâng cao, đề thi thử THPT Lê Lợi, Quảng Trị, năm 2013)

▶ **Hướng dẫn giải :**

* Đường tròn (C) có tâm I(3; -1) và bán kính $R = 2$.

Ta có: $IA = 2\sqrt{5} = d(I;\Delta) > R = 2$ nên điểm A nằm ngoại (C).

* Lại có: $P_{A/(C)} = AB.AC = d^2 - R^2 = 16$ và $AB + AC \ge 2\sqrt{AB.AC} = 8$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi AB = AC = 4. Khi đó d là tiếp tuyến của (C), nên d có dạng:

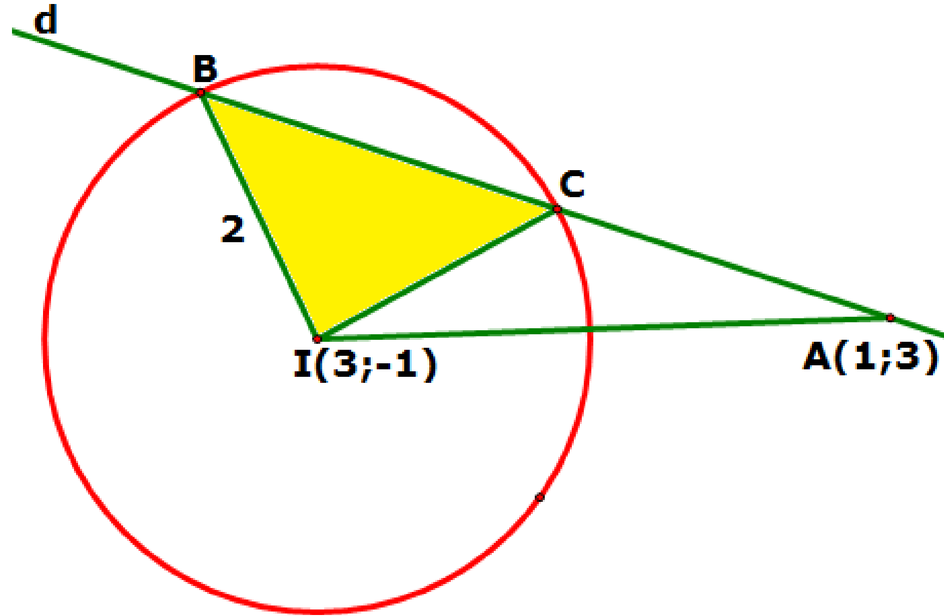
$$a(x-1)+b(y-3)=0 \Leftrightarrow ax+by-a-3b=0 \quad (a^2+b^2>0)$$

* Từ đó, ta có: $d(I;d)=2 \Leftrightarrow \dfrac{|2a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ 4a=3b \end{array}\right.$

Với b = 0, ta chọn a = 1 khi đó d: x – 1 = 0

Với 4a = 3b, ta chọn a = 3 suy ra b = 4, khi đó: d: 3x + 4y – 15 = 0

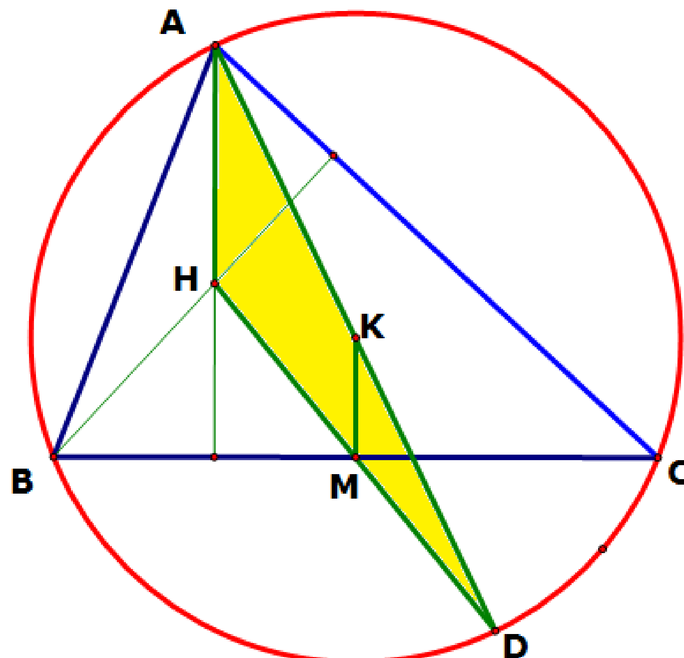
Vậy phương trình đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là: $\boxed{x-1=0 \text{ hay } 3x+4y-15=0}$



Câu 46. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm là $H\left(3;\dfrac{1}{4}\right)$, tâm đường tròn ngoại tiếp là $K\left(0;\dfrac{29}{8}\right)$, trung điểm cạnh BC là $M\left(\dfrac{5}{2};3\right)$. Xác định tọa độ các đỉnh A, B, C; biết hoành độ của B lớn hơn hoành độ của C.

(***Trích đề thi thử lần 8, Group Toán 3K Class, Facebook, năm 2013***)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi A' là điểm đối xứng của A qua K thì AA' là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Suy ra tứ giác BHCA' là hình bình hành $\Rightarrow$ M là trung điểm của A'H

Suy ra $\overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{MK} = 2\left(-\frac{5}{2};\frac{5}{8}\right)$. Từ đó xác định được: $\boxed{A(-2;1)}$

* Ta có: R = KA = KB = KC = $\frac{\sqrt{697}}{8}$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp ABC.

Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC: $\boxed{x^2 + \left(y - \frac{29}{8}\right)^2 = \frac{697}{64}}$

* Phương trình đường BC là: 4x – y – 7 = 0

Khi đó tọa độ B, C là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + \left(y - \frac{29}{8}\right)^2 = \frac{697}{64} \\ 4x - y - 7 = 0 \end{cases}$

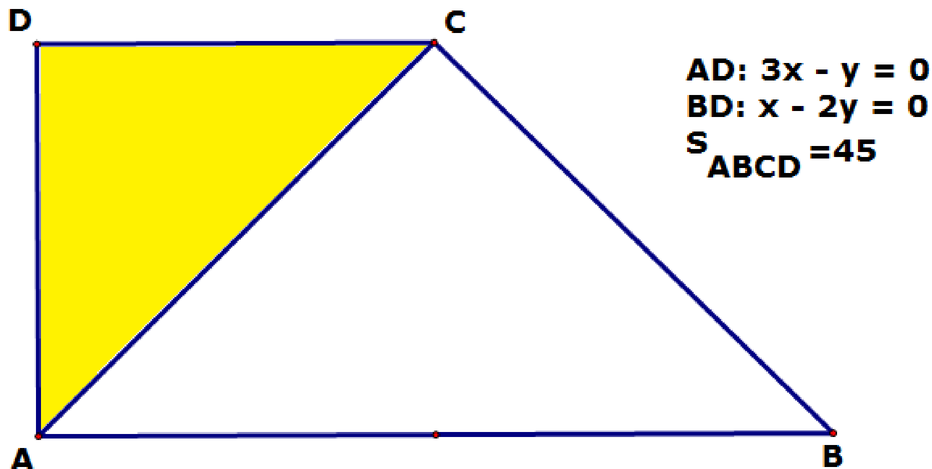
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3; y = 5 \\ x = 2, y = 1 \end{array}\right.$. Vì hoành độ của B lớn hơn hoành độ C nên ta có: B(3; 5), C(2; 1)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-2;1),\ B(3;5),\ C(2;1)}$

Câu 47. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang vuông ABCD vuông tại A và D có đáy lớn là CD,đường thẳng AD có phương trình 3x – y = 0, đường thẳng BD có phương trình x – 2y = 0, góc tạo bởi hai đường thẳng BC và AB bằng 45^0. Viết phương trình đường thẳng BC biết diện tích hình thang bằng 24 và điểm B có hoành độ dương.

(*Trích đề thi thử lần 9, Group Toán 3K Class, Facebook, năm 2013*)

► **Hướng dẫn giải:**



* Tọa độ điểm D là: $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D(0;0) \equiv O}$

* Vecto pháp tuyến của đường thẳng AD và BD lần lượt là $\overrightarrow{n_1}(3;-1), \overrightarrow{n_2}(1;-2)$

$\cos ADB = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow ADB = 45^\circ$ suy ra AD = AB (1)

* Vì góc giữa đường thẳng BC và AB bằng 45^0 suy ra $BCD = 45^0$

Nên Δ BCD vuông cân tại B suy ra DC = 2AB.

Theo bài ra ta có: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD)AD = \frac{3.AB^2}{2} = 24$

Suy ra AB = 4 nên BD= $4\sqrt{2}$

* Gọi tọa độ điểm $B\left(x_B;\dfrac{x_B}{2}\right)$, điều kiện $x_B > 0$

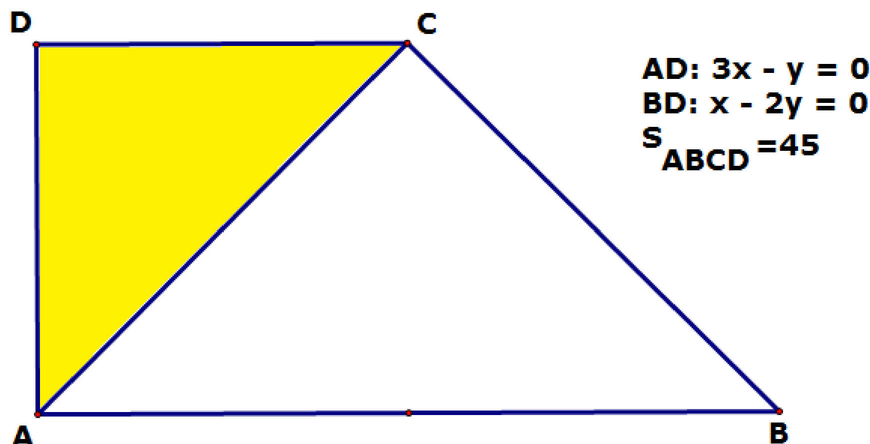
Suy ra $\left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{x_B^2+\left(\dfrac{x_B}{2}\right)^2} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_B = -\dfrac{8\sqrt{10}}{5} (loai) \\ x_B = \dfrac{8\sqrt{10}}{5} (tm) \end{array}\right.$ nên tọa độ điểm $B\left(\dfrac{8\sqrt{10}}{5};\dfrac{4\sqrt{10}}{5}\right)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B\left(\dfrac{8\sqrt{10}}{5};\dfrac{4\sqrt{10}}{5}\right)}$

Câu 48. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác *ABC* có đỉnh $A(3; 3)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(2; 1)$, phương trình đường phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ là $x - y = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh *B*, *C* biết rằng $BC = \dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ và góc $\widehat{BAC}$ nhọn.

(Trích phần cơ bản đề thi thử lần 2 khối A, THPT Chuyên Đại Học Vinh, năm 2014)

► **Hướng dẫn giải :**



* Vì *AD* là phân giác trong góc *A* nên *AD* cắt đường tròn (*ABC*) tại E

Suy ra E là điểm chính giữa cung *BC* $\Rightarrow IE \perp BC$.

* Vì *E* thuộc đường thẳng $x - y = 0$ và $IE = IA = R \Rightarrow E(0; 0)$.

Chọn $\vec{n}_{BC} = \overrightarrow{EI} = (2; 1) \Rightarrow$ phương trình *BC* có dạng $2x + y + m = 0$.

Từ giả thiết $\Rightarrow HC = \dfrac{4\sqrt{5}}{5} \Rightarrow IH = \sqrt{IC^2 - HC^2} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow d(I, BC) = \dfrac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \dfrac{|m+5|}{\sqrt{5}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = -8 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} BC: 2x + y - 2 = 0 \\ BC: 2x + y - 8 = 0. \end{array}\right.$

* Vì $\widehat{BAC}$ nhọn nên *A* và *I* phải cùng phía đối với *BC*, kiểm tra thấy $BC: 2x + y - 2 = 0$ thỏa mãn.

Từ hệ $\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow B(0; 2), C\left(\dfrac{8}{5};-\dfrac{6}{5}\right)$ hoặc $B\left(\dfrac{8}{5};-\dfrac{6}{5}\right), C(0; 2)$.

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B(0; 2), C\left(\dfrac{8}{5};-\dfrac{6}{5}\right) \text{ hay } B\left(\dfrac{8}{5};-\dfrac{6}{5}\right), C(0; 2)}$

Câu 49. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác *ABC* có phương trình đường thẳng chứa đường cao kẻ từ *B* là $x + 3y - 18 = 0$, phương trình đường thẳng trung trực của đoạn thẳng *BC* là $3x + 19y - 279 = 0$, đỉnh *C* thuộc đường thẳng $d: 2x - y + 5 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh *A* biết rằng $\widehat{BAC} = 135^0$.

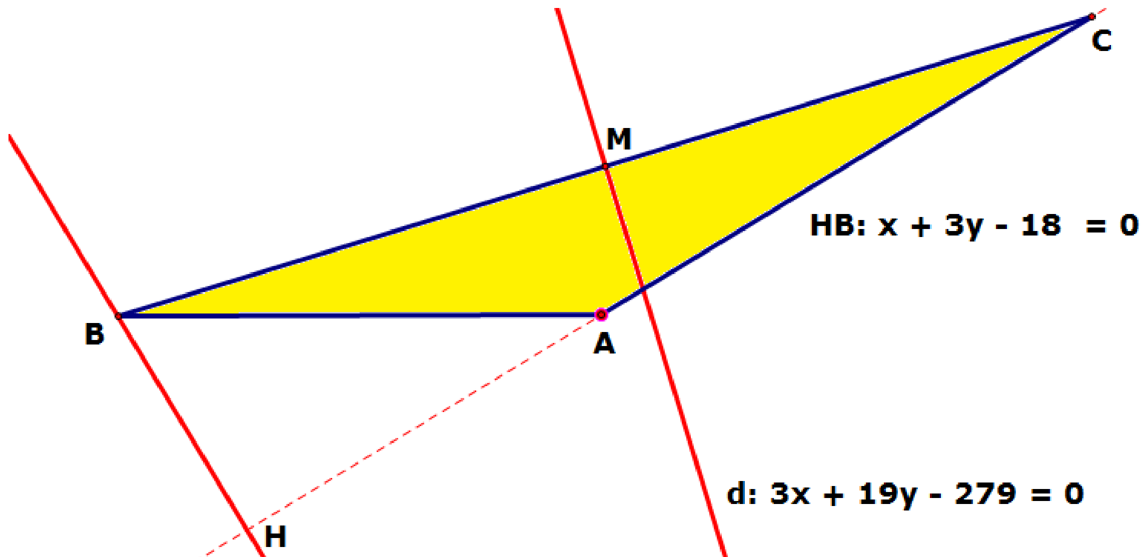
(Trích phần nâng cao đề thi thử lần 2 khối A, THPT Chuyên Đại Học Vinh, năm 2014)

▶ **Hướng dẫn giải :**

* Ta có: $B \in BH: x = -3y + 18 \Rightarrow B(-3b + 18;\, b),\ C \in d: y = 2x + 5 \Rightarrow C(c;\, 2c + 5).$

* Từ giả thiết suy ra B đối xứng C qua đường trung trực $\Delta: 3x + 19y - 279 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ M \in \Delta \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 60b + 13c = 357 \\ 10b + 41c = 409 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ c = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{B(6;\, 4)} \\ \boxed{C(9;\, 23)} \end{cases}.$$



* $AC \perp BH \Rightarrow$ chọn $\vec{n}_{AC} = \vec{u}_{BH} = (-3;\, 1) \Rightarrow$ pt $AC: -3x + y + 4 = 0 \Rightarrow A(a;\, 3a - 4)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (6 - a;\, 8 - 3a),\ \overrightarrow{AC} = (9 - a;\, 27 - 3a).$

* Ta có $A = 135^0 \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \dfrac{(6-a)(9-a) + (8-3a)(27-3a)}{\sqrt{(6-a)^2 + (8-3a)^2}.\sqrt{(9-a)^2 + (27-3a)^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

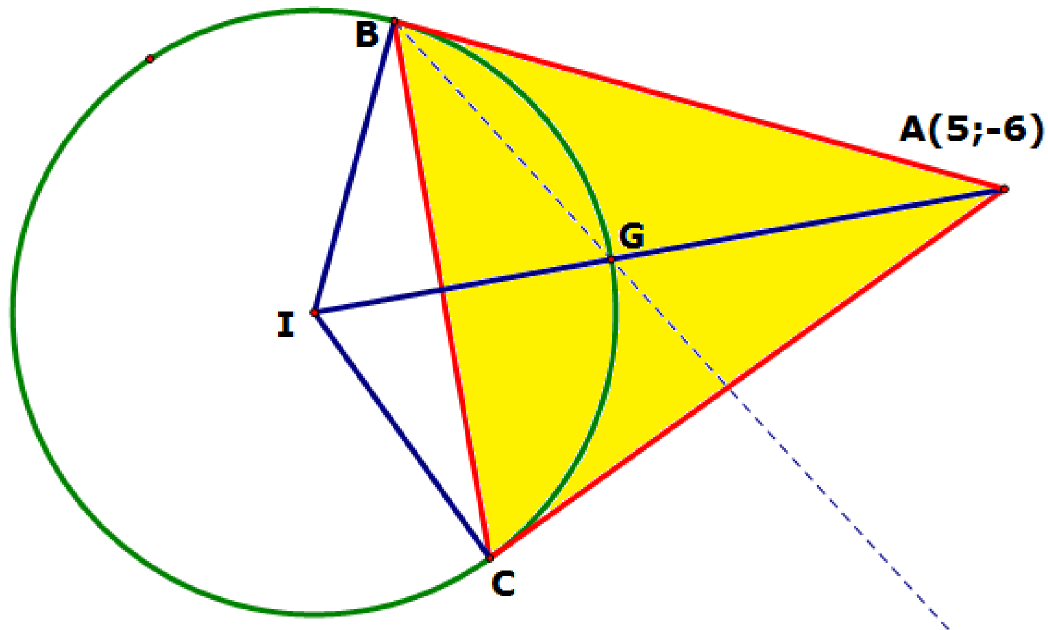
$\Leftrightarrow \dfrac{(9-a)(3-a)}{|9-a|\sqrt{a^2 - 6a + 10}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < a < 9 \\ 2(3-a)^2 = a^2 - 6a + 10 \end{cases} \Leftrightarrow a = 4.$ Suy ra $A(4;\, 8)$.

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(4;\, 8).}$

Câu 50. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ và điểm $A(5; -6)$. Từ A vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (C) với B, C là các tiếp điểm. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

(*Trích phần cơ bản đề thi thử lần 1 khối A, Group Toán 3K Class , Facebook, năm 2014*)

▶ **Hướng dẫn giải:**



* Đường tròn (C) có tâm I(-1;2) và bán kính R = 5. Suy ra IA = 10.

* Gọi H là giao điểm của BC và IA, ta có: IH.IA = IB^2

$$\Rightarrow IH = \frac{IB^2}{IA} = \frac{5}{2} \Rightarrow \overrightarrow{IH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IA} \Rightarrow \boxed{H\left(\frac{1}{2};0\right)}$$

* Do đó cosAIB = $\frac{1}{2} \Rightarrow$ AIB = 60^o nên **ΔABC là tam giác đều**

$\Rightarrow$ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC trùng với trọng tâm.

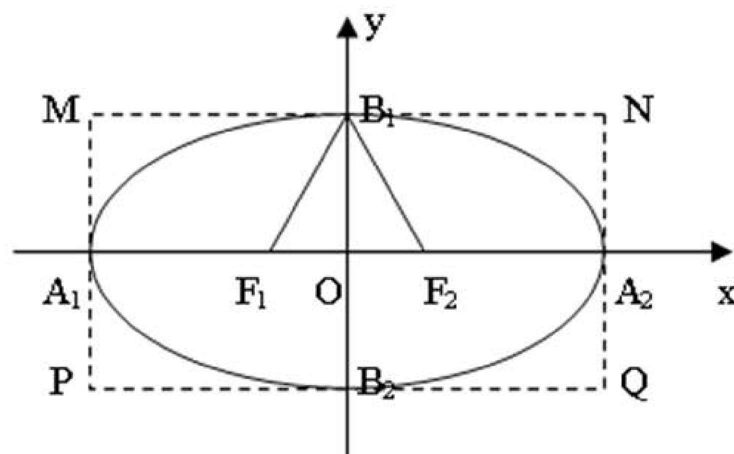
* Gọi G là trọng tâm ΔABC $\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AH} \Rightarrow \boxed{G(2;-2)}$

Vậy tọa độ điểm G thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{G(2;-2)}$

Câu 51. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của elip (*E*) biết (*E*) có chu vi hình chữ nhật cơ sở là 12(2 + $\sqrt{3}$), có đỉnh B_1 thuộc tia *Oy* và hai tiêu điểm của (*E*) lập thành một tam giác đều.

(*Trích phần nâng cao đề thi thử lần 1 khối A, Group Toán 3K Class , Facebook, năm 2014*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Trong đó F_1F_2 = 2c độ dài tiêu cự, (**$a^2 = b^2 + c^2$ (1)**)

* Giả sử MNPQ là hình chữ nhật cơ sở của (E) $\Rightarrow$ 2(2a + 2b) = 12(2 + $\sqrt{3}$)

⇔ a + b = 3(2 + $\sqrt{3}$) (2)

* Giả sử đỉnh B_1 của (E) lập với 2 tiêu điểm F_1, F_2 thành $\Delta B_1F_1F_2$ đều

$$\Rightarrow OB_1 = \frac{F_1F_2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = c\sqrt{3} \text{ (3)}$$

* Từ (1), (2), (3) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ b = c\sqrt{3} \\ a + b = 3(2+\sqrt{3}) \end{cases}$ (I) (b > 0)

Giải hệ (I) ta được $\begin{cases} a = 6 \\ b = 3\sqrt{3} \end{cases}$

Vậy phương trình elip thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{(E): \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1}$

Câu 52. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$ và điểm A(1; 2), B(1; 6). Gọi V(A; k) là phép vị tự tâm A tỉ số k sao cho V(A; k) biến đường tròn (C) thành đường tròn (C') đi qua B. Tính diện tích ảnh của tam giác OAB qua V(A; k)

(*Trích đề thi thử lần 1, THPT Đông Sơn 1, Thanh Hóa, năm 2010*)

► Hướng dẫn giải :

* Do B thuộc (C') nên tồn tại M(x; y) thuộc (C) sao cho B là ảnh của M qua phép vị tự V(A; k)

Suy ra $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AM}$. Do A khác B nên k $\neq 0$

Suy ra $\begin{cases} 1-1 = k(x-1) \\ 6-2 = k(y-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{4+2k}{k} \end{cases}$

* Do M thuộc C) nên $(C): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2 \Rightarrow (1-2)^2 + \left(\frac{4+2k}{k} - 1\right)^2 = 2 \Leftrightarrow k = -2$

* Đường thẳng AB có phương trình x – 1 = 0. Do đó d(O; AB) = 1

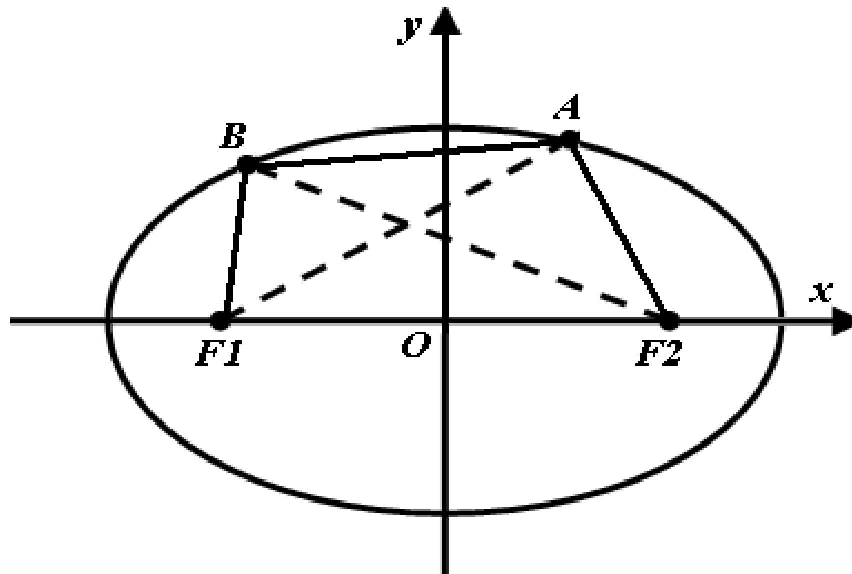
Độ dài AB = 4. Suy ra $S_{AOB} = \frac{1}{2} AB.d(O; AB) = 2$

Vậy ảnh của tam giác OAB qua phép vị tự V(A; 2) có diện tích là $\boxed{S = 2.S_{OAB} = 2}$

Câu 53. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E): 9x^2 + 25y^2 = 225$. Gọi F_1, F_2 lần lượt là hai tiêu điểm của (*E*) ($x_{F_1} < x_{F_2}$). Gọi *A*, *B* là hai điểm thuộc (*E*). Xác định tọa độ của *A* và *B* để chu vi tứ giác F_1F_2BA nhỏ nhất biết rằng tổng độ dài hai đường chéo bằng 6.

(*Trích đề thi thử THPT Chuyên Lê Hồng Phong, Tp Hồ Chí Minh, năm 2014*)

► Hướng dẫn giải :



* $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \\ c^2 = a^2 - b^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \\ c = 4 \end{cases}$

Theo giả thiết thì $BF_2 + AF_1 = 6$ **(1)**
Mặt khác $BF_2 + BF_1 = AF_1 + AF_2 = 10$
Suy ra $BF_2 + BF_1 + AF_2 + AF_1 = 20 \Leftrightarrow BF_1 + AF_2 = 14$ **(2)**

* Vậy chu vi tứ giác F_1F_2AB là $P = F_1F_2 + AF_2 + BF_1 + AB = 2c + 14 + AB =$ **22 + AB**

Do đó $P_{min} = AB_{\min} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Mặt khác $\begin{cases} A \in (E) \\ B \in (E) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_A{}^2}{25} + \dfrac{y_A{}^2}{9} = 1 \;\; (2) \\ \dfrac{x_B{}^2}{25} + \dfrac{y_B{}^2}{9} = 1 \;\; (3) \end{cases}$

* Lấy (2) trừ (3) ta được: $\frac{1}{25}(x_A^2 - x_B^2) + \frac{1}{9}(y_A^2 - y_B^2) = 0$ **(4)**

Từ (1) $\Leftrightarrow a - ex_B + a + ex_A = 6 \Leftrightarrow$ $\mathbf{x_B - x_A = 5}$ **(5)** nên $\mathbf{AB = \sqrt{5^2 + (y_B - y_A)^2} \geq 5}$
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow AB_{min} = 5 \Leftrightarrow y_B = y_A$
Do đó (4) $\Leftrightarrow (x_A - x_B)(x_A + x_B) = 0 \Leftrightarrow x_A + x_B = 0$ **(6)**

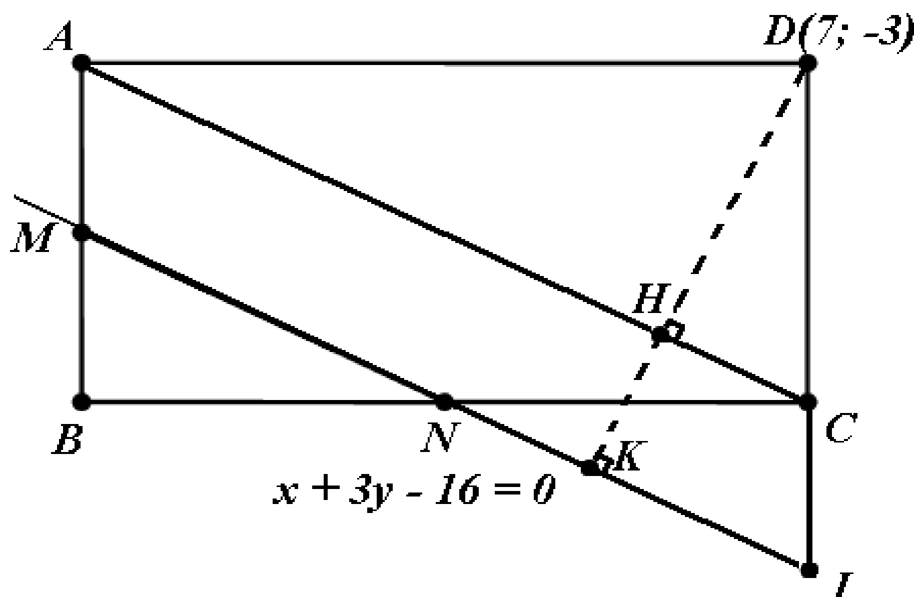
* Giải (5) và (6) ta được $\begin{cases} x_A = \dfrac{5}{2} \\ x_B = \dfrac{-5}{2} \end{cases} \Rightarrow y_A = y_B = \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Vậy tọa độ điểm A và B thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A\left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{\pm 3\sqrt{3}}{2}\right), B\left(\dfrac{-5}{2}; \dfrac{\pm 3\sqrt{3}}{2}\right)}$

Câu 54. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật *ABCD* có đỉnh *D*(7; –3) và cạnh *BC* = 2*AB*. Gọi *M*, *N* lần lượt là trung điểm của *AB* và *BC*. Tìm tọa độ đỉnh *C* biết phương trình *MN* là *x* + 3*y* – 16 = 0.

(*Trích phần nâng cao đề thi thử lần 4 khối B, Group Toán 3K Class, Facebook, năm 2014*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi K và H lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên MN và AC.

Phương trình DK là 3x - y - 24 = 0 ⇒ Tọa độ K thỏa hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+3y-16=0 \\ 3x-y-24=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{44}{5} \\ y=\dfrac{12}{5} \end{cases} \Rightarrow \boxed{K\left(\dfrac{44}{5};\dfrac{12}{5}\right)}$$

* Gọi I = MN ∩ CD. Ta có ACIM là hình bình hành ⇒ CI = AM

Theo định lý Thales thuận ta có: $\dfrac{\text{DH}}{\text{DK}}=\dfrac{\text{DC}}{\text{DI}}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow \overrightarrow{DH}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DK}\Rightarrow \boxed{H\left(\dfrac{41}{5};\dfrac{3}{5}\right)}$

Đường thẳng AC qua H và AC // MN ⇒ AC: x + 3y - 10 = 0.

* C ∈ AC ⇒ C(10 - 3c; c)

Trong ΔACD ⊥ D có $\dfrac{1}{AD^2}+\dfrac{1}{CD^2}=\dfrac{1}{DH^2}\Rightarrow CD^2=18$

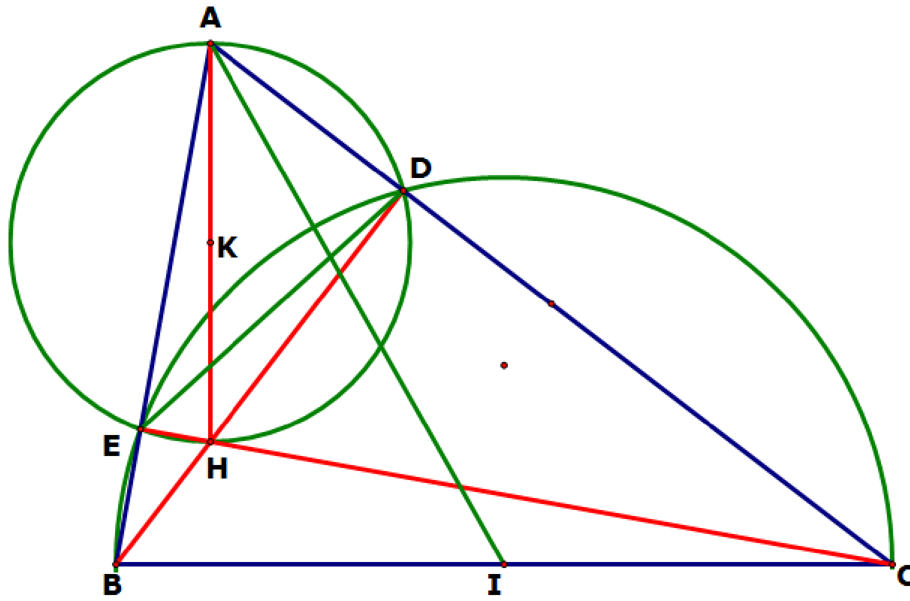
* Do đó: $(10 - 3c - 7)^2 + (c + 3)^2 = 18 \Leftrightarrow 10c^2 - 12c = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0\Rightarrow C(10;0) \\ c=\dfrac{6}{5}\Rightarrow C\left(\dfrac{32}{5};\dfrac{6}{5}\right) \end{array}\right.$

Vậy tọa độ điểm C thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{C(10;0)\text{ hay } C\left(\dfrac{32}{5};\dfrac{6}{5}\right)}$

Câu 55. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm H(3; 0) và trung điểm của BC là I(6;1). Đường thẳng AH có phương trình x + 2y – 3 = 0. Gọi D, E lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C của tam giác ABC. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết đường thẳng DE: x – 2 = 0 và điểm D có tung độ dương.

(*Trích đề thi thử lần 1, THPT Chuyên Vĩnh Phúc, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi K là trung điểm của AH. Tứ giác ADHE nội tiếp đường tròn tâm K và BCDE nội tiếp đường tròn tâm I. Suy ra IK vuông góc DE. Nên IK : y – 1 = 0

* Tọa độ K(1; 1) suy ra A(-1 ; 2)

* D thuộc DE nên D(2; d). Ta có KA = KD $\Leftrightarrow 5 = 1 + (d-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = 3\ (tm) \\ d = -1\ (\text{ktm}) \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{D(2;3)}$

* Phương trình AC: x – 3y +7 = 0. Phương trình BC: 2x – y – 11 = 0

Tọa độ C(8; 5) suy ra B(4; - 3)

Vậy tọa độ các điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-1;2),\ B(4;-3),\ C(8;5)}$

Câu 56. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác trong góc ACB cắt đường cao AH và đường tròn đường kính AC lần lượt tại $N\left(\frac{11}{2};\frac{13}{2}\right)$ và M (M ≠ N). Biết đường thẳng AM cắt BC tại F(5;5) . Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC biết A thuộc đường thẳng $x - 2y + 7 = 0$ và A có tung độ nguyên.

(*Trích đề thi thử lần 1, Website: Moon.vn, năm 2015*)

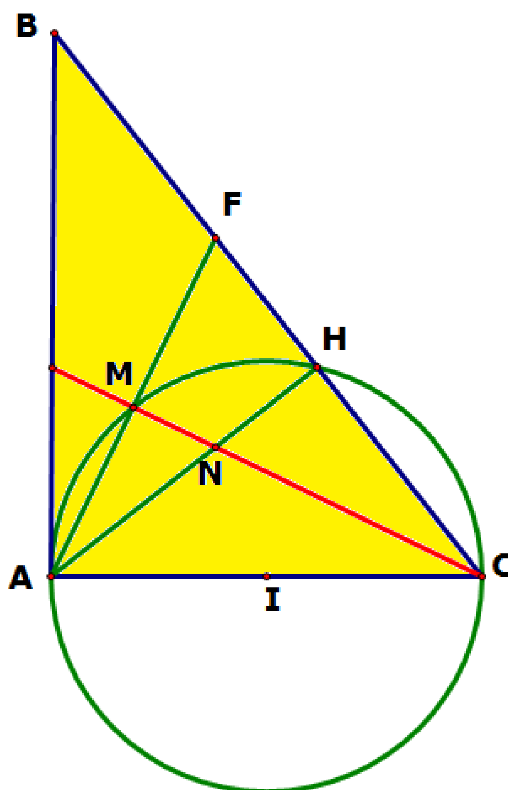
► **Hướng dẫn giải:**

* Dễ thấy góc $\angle AMC = 90^o$ (góc chắn đướng kinh AC) suy ra AF vuông góc CM.

Ta có ΔAFC cân tại C do có phân giác góc ACB đồng thời là đường cao. Do vậy MC là trung trực của AF.

* Gọi $A(2a-7;a)$. Ta có $NA = NF \Leftrightarrow \left(2a - \frac{25}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{13}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 7 \Rightarrow \boxed{A(7;7)} \\ a = \frac{28}{5} \Rightarrow A\left(\frac{21}{5};\frac{28}{5}\right)(loai) \end{array}\right.$

Suy ra M(6;6). Khi đó phương trình đường thẳng MC: x + y – 12 = 0



* Lại có: $\begin{cases} AH \perp BC \\ CM \perp AF \end{cases} \Rightarrow NF \perp AC$ (do N là trực tâm tam giác AFC)

Phương trình đường thẳng AC qua A vuông góc với NF là x + 3y – 28 = 0

* Khi đó $C = CM \cap AC \Rightarrow$ Tọa độ C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+3y-28=0 \\ x+y-12=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=8 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(4;8)}$

Suy ra phương trình AB: 3x – y – 14 = 0

Từ đó ta có: BC: 3x + y – 20 = 0. $B = BC \cap AB \Rightarrow \boxed{B\left(\frac{17}{3};3\right)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(7;7),\ B\left(\frac{17}{3};3\right),\ C(4;8)}$

Câu 57. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I(2;1), bán kính R = 5. Chân đường cao hạ từ B, C, A của tam giác ABC lần lượt là D(4; 2), E(1; -2) và F. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp của tam giác DEF, biết rằng A có tung độ dương.

(*Trích đề thi thử lần 4, THPT Lương Thế Vinh, Hà Nội, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**

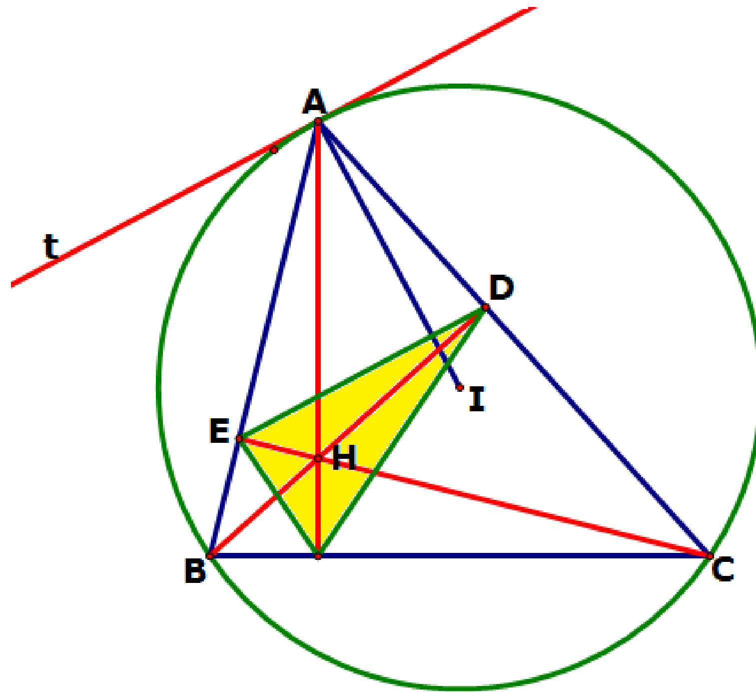
* Tứ giác BCDE nội tiếp đường tròn nên $\angle AED = \angle BCD$.

Kẻ tiếp tuyến At của (I; R) ta có $\angle BCD = \angle EAt$ suy ra $\angle AED = \angle EAt \Rightarrow At//DE \Rightarrow AI \perp DE$

* Phương trình AI qua I, vuông góc với DE: 3x + 4y – 10 = 0

Suy ra $A\left(a;\frac{10-3a}{4}\right) \in AI \Rightarrow AI^2 = 25 \Rightarrow a^2 - 4a - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 6 \Rightarrow A(6;-2)\ (ktm) \\ a = -2 \Rightarrow \boxed{A(-2;4)} \end{array}\right.$

* Ta có góc $\angle DEC = \angle DBC = \angle HEF \Rightarrow EC$ là phân giác trong của góc $\angle DEF$



Tương tự ta có DB là phân giác trong của góc $\angle EFD$

Suy ra H (giao điểm của BD và CE) là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

* Phương trình đường CE qua E vuông góc AE là x – 2y – 5 = 0

Phương trình BD qua D và vuông góc AD là 3x – y – 10 = 0

Do đó $H = BD \cap EC \Rightarrow \boxed{H(3;-1)}$

Vậy tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF là $\boxed{H(3;-1)}$

Câu 58. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang cân ABCD có đáy là AD và BC, biết rằng AB = BC, AD = 7. Đường chéo AC có phương trình x – 3y – 3 = 0; điểm M(-2; -5) thuộc đường thẳng AD. Tìm tọa độ đỉnh D biết rằng đỉnh B(1;1).

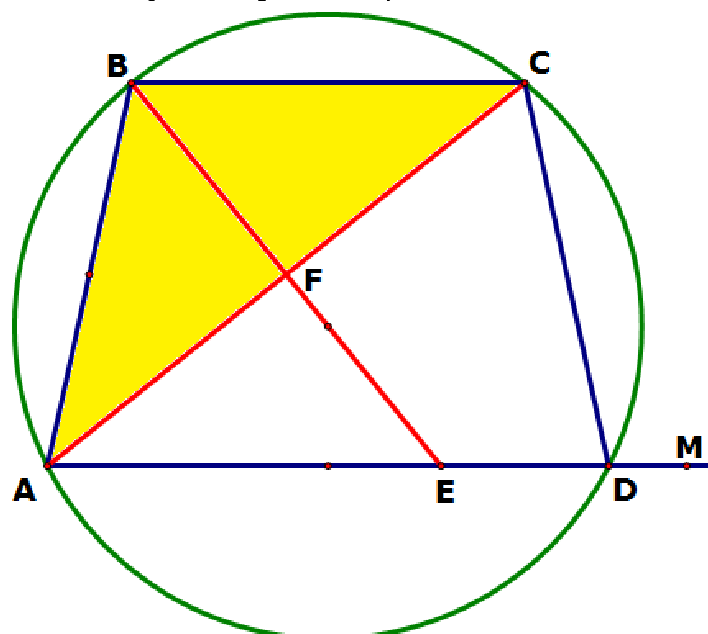
(*Trích đề thi thử lần 2, THPT Hậu Lộc 2, Thanh Hóa, năm 2015*)

▶ **Hướng dẫn giải :**

* Do ABCD là hình thang cân nên ABCD là hình thang nội tiếp đường tròn.

Do AB = BC = CD nên AC là đường phân giác trong góc BAD.

Gọi E là điểm đối xứng của B qua AC suy ra E thuộc AD.



* Ta có phương trình BE là 3x + y – 4 = 0.

Gọi F là giao điểm AC và BE suy ra tọa độ F là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-3y-3=0 \\ 3x+y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{F\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{-1}{2}\right)}$$

Do F là trung điểm BE nên E(2; -2)

* Lại do M thuộc AD nên phương trình AD là 3x – 4y – 14 = 0

Điểm A là giao điểm AD và AC nên tọa độ A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x-4y-14=0 \\ x-3y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(6;1)}$$

* Gọi $D \in AD \Rightarrow D(2+4a;-2+3a)$

Do AD = 7 $\Rightarrow AD^2 = 49 \Leftrightarrow (4a-4)^2 + (3a-3)^2 = 49 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{12}{5} \\ a=\dfrac{-2}{5} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} D_1\left(\dfrac{58}{5};\dfrac{26}{5}\right) \\ D_2\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{-16}{5}\right) \end{array}\right.$

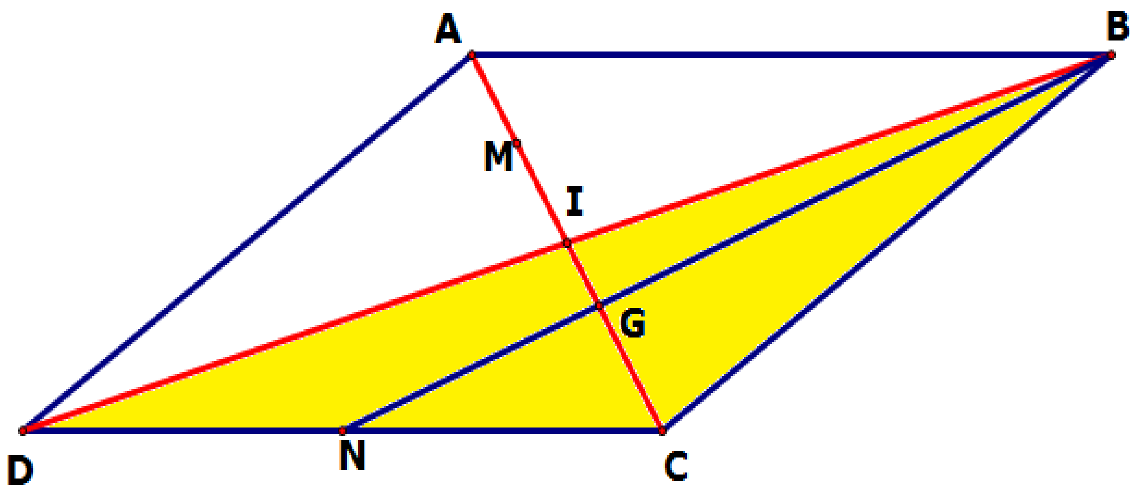
Điểm B và D luôn nằm về 2 phía của đường AC do đó kiểm tra vị trí tương đối của B và 2 điểm D trên ta thấy chỉ có điểm D_2 thỏa mãn.

Vậy điểm D thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{D_2\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{-16}{5}\right)}$

Câu 59. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có N là trung điểm của cạnh CD và đường thẳng BN có phương trình là 13x – 10y + 13 = 0; điểm M(-1; 2) thuộc đoạn thẳng AC sao cho AC = 4AM. Gọi H là điểm đối xứng với N qua C. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết rằng 3AC = 2AB và điểm H thuộc đường thẳng 2x – 3y = 0.

(*Trích đề thi thử lần 1, THPT Chuyên Hà Tĩnh, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Ta có d(M; BN) = $\dfrac{|13(-1)-10.2+13|}{\sqrt{13^2+10^2}} = \dfrac{20}{\sqrt{269}}$ .Ta có: $H \in \Delta \Rightarrow H(3a;2a)$

* Gọi I là giao điểm 2 đường chéo AC và BD, G là giao điểm cảu AC và BN. Ta thấy G là trọng tâm tam giác BCD.

Suy ra $CG = \dfrac{2}{3}CI = \dfrac{1}{3}AC$ mà $AM = \dfrac{AC}{4} \Rightarrow MG = \dfrac{5AC}{12} \Rightarrow CG = \dfrac{4MG}{5}$

Suy ra $d(C,BN)=\frac{4}{5}d(M;BN)\Rightarrow d(H;BN)=2d(C,BN)=\frac{32}{\sqrt{269}}$

$$\Leftrightarrow \frac{|13.3a-10.2a+13|}{\sqrt{269}}=\frac{32}{\sqrt{269}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=\frac{-45}{19}\end{array}\right.$$

Vì H và M nằm khác phía đối với đường thẳng BN nên ta nhận H(3; 2).

* Ta thấy $MC=\frac{3AC}{4}=\frac{2AB}{4}=\frac{2CD}{4}=\frac{CD}{2}=CN=CH\Rightarrow \Delta MHN\perp M$

MH có phương trình y – 2 = 0 nên MN: x + 1 = 0.

Suy ra N(-1; 0) suy ra **C(1; 1), D(-3 -1).**

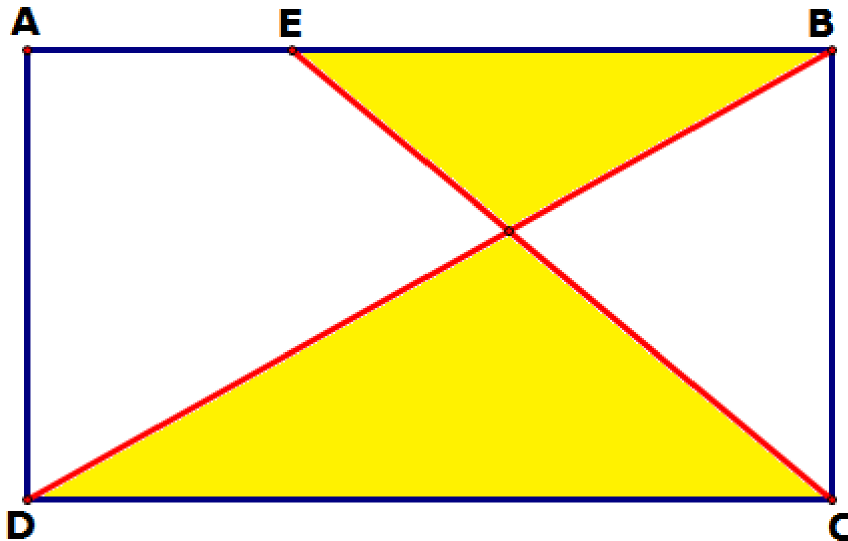
* Do $\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{MA}\Rightarrow A\left(\frac{-5}{3};\frac{7}{3}\right)\Rightarrow I\left(\frac{-1}{3};\frac{5}{3}\right)\Rightarrow B\left(\frac{7}{3};\frac{13}{3}\right)$

Vậy tọa độ các điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A\left(\frac{-5}{3};\frac{7}{3}\right),B\left(\frac{7}{3};\frac{13}{3}\right),\ C(1;1),\ D(-3;-1)}$

Câu 60. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có đỉnh C thuộc $\Delta: x-2y-1=0$, đường thẳng BD có phương trình $7x-y-9=0$. Điểm E(-1; 2) thuộc cạnh AB sao cho EB = 2EA. Biết rằng B có tung độ dương. Tìm tọa độ các điểm A, B, C, D.

(Trích phần cơ bản đề thi thử lần 3, THPT Chuyên Quốc Học, Huế, năm 2014)

► **Hướng dẫn giải :**



* $C\in\Delta\Rightarrow C(2c+1;c)$.

Ta có: $d(C;BD)=\frac{4}{3}d(E;BD)\Leftrightarrow \frac{|13c-2|}{\sqrt{50}}=\frac{4}{3}\frac{|-18|}{\sqrt{50}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=2 \\ c=\frac{-22}{13}\end{array}\right.$

c = 2 suy ra **C(5; 2) (thỏa mãn vì C, E khác phía đối với BD)**

$c=\frac{-22}{13}\Rightarrow C\left(\frac{-31}{13};\frac{-22}{13}\right)$ (loại vì C, E cùng phía đối với BD)

* $B\in BD: 7x-y-9=0\Rightarrow B(b;7b-9)$.

Ta có: $\angle EBC = 90^0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (-1-b)(5-b) + (11-7b)(11-7b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2 \\ b = \frac{29}{25} \end{array}\right.$

Với b = 2 suy ra B(2; 5) (thỏa mãn điều kiện B có tung độ dương).

Với $b = \frac{29}{25} \Rightarrow B\left(\frac{29}{25}; \frac{-22}{25}\right)$ (ktm)

* Ta có: $\overrightarrow{BA} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BE} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - 2 = \frac{4}{3}(-1-2) \\ y_A - 5 = \frac{4}{3}(2-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -2 \\ y_A = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-2;1)}$

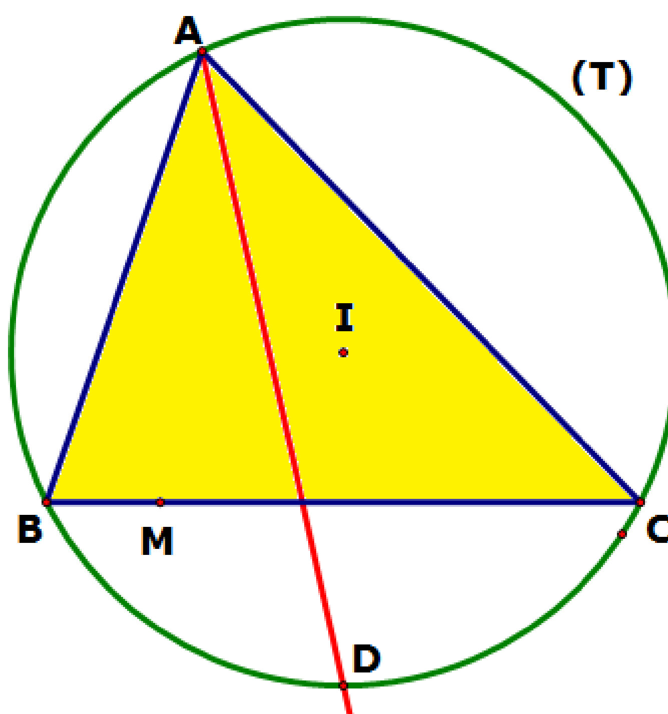
* Mặt khác, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \boxed{D(1;-2)}$

Vậy tọa độ các điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-2;1),\ B(2;5),\ C(5;2),\ D(1;-2)}$

Câu 61. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đường phân giác trong của góc A nằm trên đường thẳng d: x + y = 0, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$. Biết rằng điểm M(3; -4) thuộc đường thẳng BC và điểm A có hoành độ âm. Tìm tọa độ của các điểm A, B, C.

(Trích phần nâng cao đề thi thử lần 3, THPT Chuyên Quốc Học, Huế, năm 2014)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi $(T): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$. Tọa độ giao điểm của d và (T) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, y = 2 \\ x = 5, y = -5 \end{array}\right.$$

Vì A là một giao điểm của d và (T), đồng thời A có hoành độ âm nên A(-2;2)

Gọi I(2; -1) là tâm của đường tròn (T).

* Gọi D(5; -5) là giao điểm thứ hai của d và (T). Do AD là phân giác trong góc A nên ta có DB = DC. Suy ra ID là đường trung trực của BC.

Đường thẳng BC qua M(3; -4) và có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{ID} = (3;-4)$ nên có phương trình:

$$3(x-3) - 4(y+4) = 0 \Leftrightarrow \boxed{BC: 3x - 4y - 25 = 0}$$

* Tọa độ các điểm B, C là nghiệm của hệ phương trình:

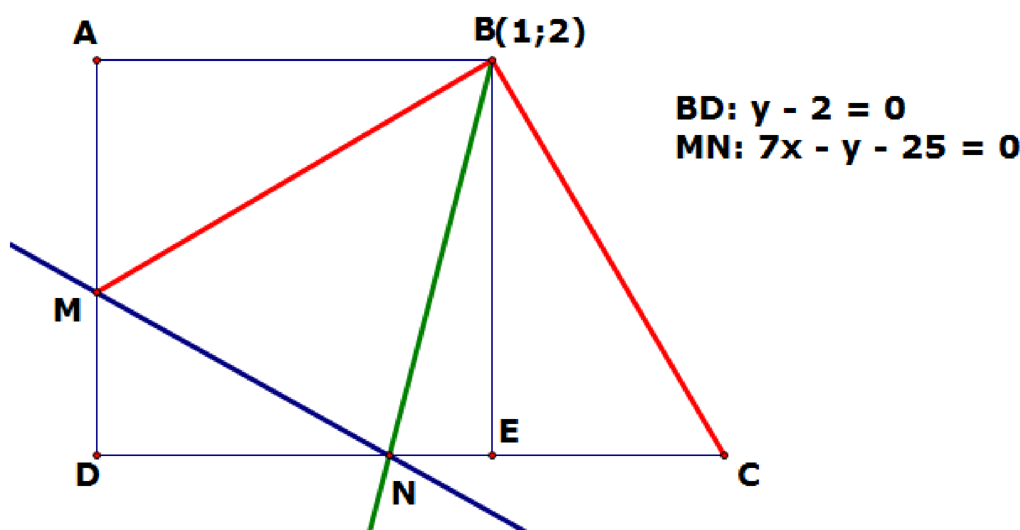
$$\begin{cases} x^2+y^2-4x+2y-20=0 \\ 3x-4y-25=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=-1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x=\dfrac{3}{5} \\ y=\dfrac{-29}{5} \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B(7;-1),\ C\left(\frac{3}{5};\frac{29}{5}\right) \text{ hay } B\left(\frac{3}{5};\frac{29}{5}\right), C(7;-1)}$

Câu 62. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang vuông ABCD vuông tại A và D có AB = AD < CD, điểm B(1;2), đường thẳng BD có phương trình y = 2; Biết rằng đường thẳng d: 7x – y – 25 = 0 lần lượt cắt các đoạn AD và CD theo thứ tự tại M và N sao cho BM vuông góc với BC và BN là tia phân giác của góc MBC. Tìm tọa độ đỉnh D, biết hoành độ của D dương.

(*Trích đề thi thử THPT Gia Bình 1, Bắc Ninh, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Ta có tứ giác MBCD nội tiếp suy ra $\angle BDC = \angle BMC = 45^0$ nên tam giác BCM vuông cân tại B hay BN là trung trực của MC, hay $\angle BMN = \angle BCN$.

* Hạ BH vuông góc với d, H thuộc d và BE vuông góc với DC, E thuộc DC.

Khi đó hai tam giác BHM = BEC suy ra BE = BH = d(B, d) = $2\sqrt{2}$

* Ta lại có ABED là hình vuông nên BD = 4

D(x;2) thuộc đường BD: y = 2,

Ta có phương trình $BD^2 = 16 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-3 \end{array}\right.$

* Do D có hoành độ dương nên D(5; 2).

Vậy tọa điểm D thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{D(5;2)}$

Câu 63. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm H(2; 0), phương trình đường trung tuyến CM: x + 7y – 8 = 0, phương trình đường trung trực của BC: x – 3 = 0. Tìm tọa độ của đỉnh A

(*Trích phần cơ bản đề thi thử lần 1, Diễn đàn Ôn Luyện Toán, năm 2012*)

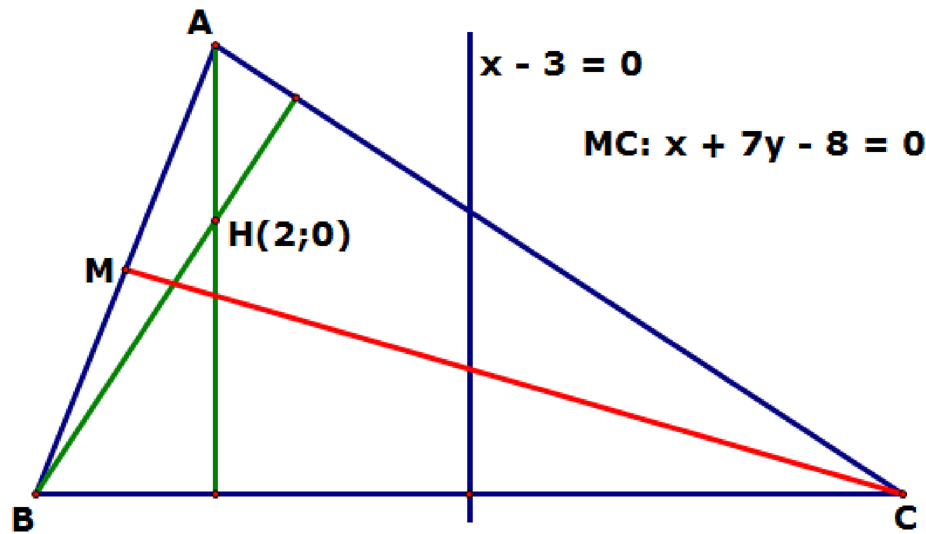
► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi G và O lần lượt là trọng tâm và tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đặt O(3; a)

Suy ra phương trình OH là: $\dfrac{x-2}{3-2} = \dfrac{y-0}{a-0} \Leftrightarrow \boxed{OH: a(x-2)+y=0}$

* Ta có G là giao điểm của OH và CM nên tọa độ G thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} a(x-2)+y=0 \\ x+7y-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{14a-8}{7a-3} \\ y=\dfrac{2a}{7a-3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{G\left(\dfrac{14a-8}{7a-3};\dfrac{2a}{7a-3}\right)}$$



* Lại có: $2\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GH}=\vec{0}$ nên $2(x_O-x_G)+(x_H-x_G)=0 \Leftrightarrow 6-3\dfrac{14a-8}{7a-3}+2=0 \Leftrightarrow a=0$

Vậy $G\left(\dfrac{8}{3};0\right)$ dễ dàng suy ra tọa độ O(3;0). Gọi $A(2;m)$. Dựa vào $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GC} \Rightarrow \boxed{N\left(3;\dfrac{m}{2}\right)}$

* Phương trình đường thẳng BC, vuông góc với x = 3 có dạng $y=\dfrac{m}{2}$.

C thuộc đường tròn tâm O bán kính OA với $OA^2=1+m^2$.

Ta được $(x_C-3)^2+\dfrac{m^2}{4}=1+m^2 \Rightarrow \begin{cases} x_C=3\pm\sqrt{1+\dfrac{3m^2}{4}} \\ y_C=\dfrac{m}{2} \end{cases}$

Mặt khác C thuộc CM nên ta có:

* TH1: với $x_C=3+\sqrt{1+\dfrac{3m^2}{4}}$, ta có:

$$3+\sqrt{1+\frac{3m^2}{4}}+\frac{7m}{2}-8=0 \Leftrightarrow \sqrt{1+\frac{3m^2}{4}}=5-\frac{7m}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-\dfrac{7m}{2}\ge 0 \\ 1+\dfrac{3m^2}{4}=25-35m+\dfrac{49m^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le\dfrac{10}{7} \\ \left[\begin{array}{l} m=2\ (ktm) \\ m=\dfrac{24}{23}\ (tm) \end{array}\right. \end{cases}$$

* TH1: với $x_C=3-\sqrt{1+\dfrac{3m^2}{4}}$, ta có:

$$3-\sqrt{1+\frac{3m^2}{4}}+\frac{7m}{2}-8=0 \Leftrightarrow \sqrt{1+\frac{3m^2}{4}}=\frac{7m}{2}-5$$

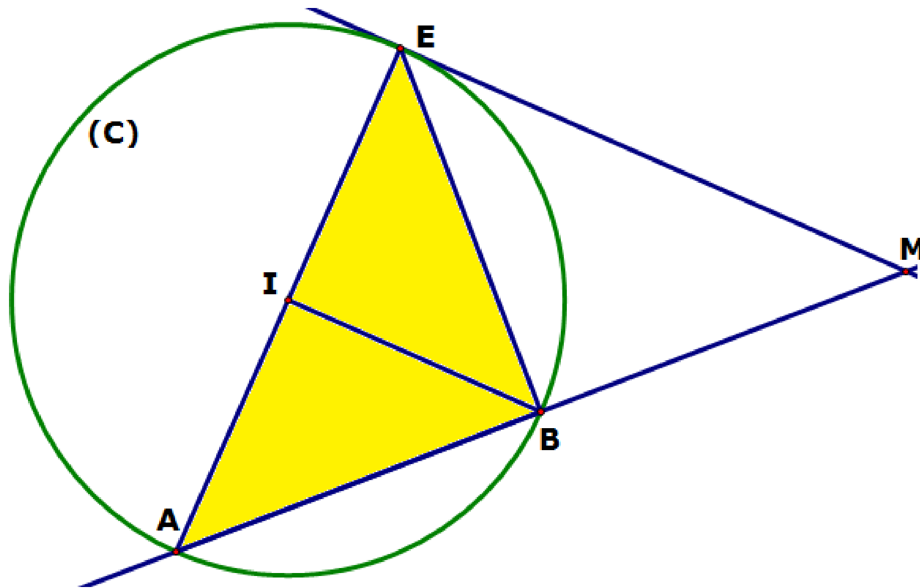
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7m}{2} - 5 \ge 0 \\ 1 + \dfrac{3m^2}{4} = 25 - 35m + \dfrac{49m^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge \dfrac{10}{7} \\ \left[\begin{array}{l} m = 2 \ (tm) \\ m = \dfrac{24}{23} \ (k\,tm) \end{array} \right. \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm A thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(2;2) \ hay \ A\left(2;\dfrac{24}{23}\right)}$

Câu 64. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x+2)^2+(y-1)^2=4$. Gọi M là điểm sao cho tiếp tuyến qua M tiếp xúc với (C) tại E, cát tuyến qua M cắt (C) tại A, B sao cho tam giác ABE vuông cân tại B. Tìm tọa độ điểm M sao cho khoảng cách từ M đến O là ngắn nhất

(Trích phần nâng cao đề thi thử lần 1, Diễn đàn Ôn Luyện Toán, năm 2012)

▶ **Hướng dẫn giải :**



* Gọi I là tâm đường tròn (C), suy ra I(-2; 1). Vì tam giác EBA vuông cân tại B, nên EA là đường kính của đường tròn. Suy ra $MI = 2\sqrt{5}$

* Ta có $MO \ge |MI - OI| \ge |2\sqrt{5} - \sqrt{5}| = \sqrt{5}$ (theo bất đẳng thức tam giác).

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ M, O, I thẳng hàng (1) và $MO = \sqrt{5}$ (2)

* M, O, I thẳng hang suy ra M thuộc OI: x + 2y = 0 suy ra $M(-2m; m)$

* $MO^2 = 5 \Leftrightarrow (-2m)^2 + m^2 = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \Rightarrow M(-2;1) \equiv I \ (loai) \\ m = -1 \Rightarrow M(2;-1) \end{array} \right.$

Vậy tọa độ điểm M thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{M(2;-1)}$

Câu 65. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x+1)^2+(y-2)^2=16$ và đường thẳng d có phương trình 3x + 4y – 5 = 0. Viết phương trình đường tròn (C’) có bán kính bằng 1 tiếp xúc ngoài với (C) sao cho khoảng cách từ tâm I của nó đến d là lớn nhất

(Trích đề thi thử lần 4, Website: toanphothong.vn , năm 2012)

▶ **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Xét đường tròn $(C):(x+1)^2+(y-2)^2=16$ có tâm O(-1; 2) và bán kính R = 4.

Gọi I(a; b), do (C’) tiếp xúc ngoài (C) nên ta có: $OI = R + R' = 5 \Leftrightarrow (a+1)^2 + (b-2)^2 = 25$

Mặt khác ta có: $d(I;\Delta)=\dfrac{|3a+4b-5|}{5}$

Khi đó ta quy về bài toán tìm miền giá trị của $P=3a+4b-5$ với $(a+1)^2+(b-2)^2=25$

* Đây là bài toán rất quen thuộc. Sử dụng phương pháp rút thế ta sẽ được : $b=\dfrac{P-3a+5}{4}$

Suy ra $16(a+1)^2+(P+3(a+1))^2=400$ (đặt $t=a+1$)

Suy ra $16t^2+(P+3t)^2=400 \Leftrightarrow 25t^2-6Pt+P^2-400=0$

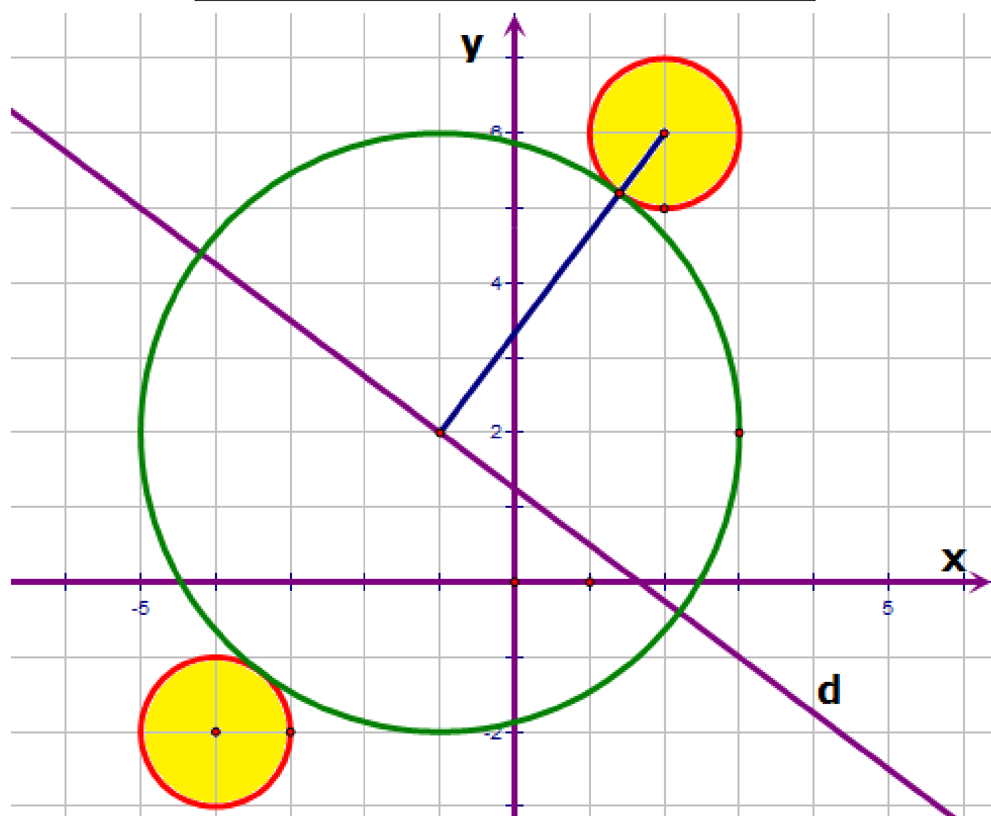
* Ta cần tìm P để phương trình có nghiệm t, hay $\Delta'=-16P^2+10000\geq 0 \Leftrightarrow \boxed{-25\leq P\leq 25}$

Khi đó ta có ngay khoảng cách lớn nhất của $d(I;\Delta)_{max} \Leftrightarrow P=\pm 25$

Từ đó suy ra có 2 điểm I thỏa mãn $\boxed{I(2;6)\ hay\ I\left(-2;\dfrac{-7}{2}\right)}$

Vậy phương trình đường tròn thỏa yêu cầu bài toán là

$$\boxed{(x-2)^2+(y-6)^2=1\ hay\ (x+2)^2+\left(y+\dfrac{7}{2}\right)^2=1}$$



► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Đầu tiên ta có đường tròn (C) có tâm I(-1; 2) và R = 4. Điểm I thuộc đường thẳng Δ (Đây là điểm mấu chốt để lời giải ngọn hơn).

Ta có đường tròn (C’) có tâm I’ và bán kính r = 1 và tiếp xúc ngoài với đường tròn (C) nên ta dễ dàng suy ra quỹ tích của các điểm I’ là đường tròn (K) có tâm I và R’ = R + r = 5.

Hay phương trình đó là: $\boxed{(K):(x+1)^2+(y-2)^2=25}$

* Vẽ hình ra ta thấy khoảng cách của I đến Δ là lớn nhất khi I là giao điểm của đường thẳng đi qua I và vuông góc Δ với đường tròn (K). Ta viết phương trình đường thẳng đó là 4x – 3y + 10 = 0.

Dễ dàng tìm ra giao điểm của nó là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y-2)^2=25\\ 4x-3y+10=0\end{cases} \text{suy ra } \boxed{I'(2;6)\ hay\ I'\left(-2;\dfrac{-7}{2}\right)}$$

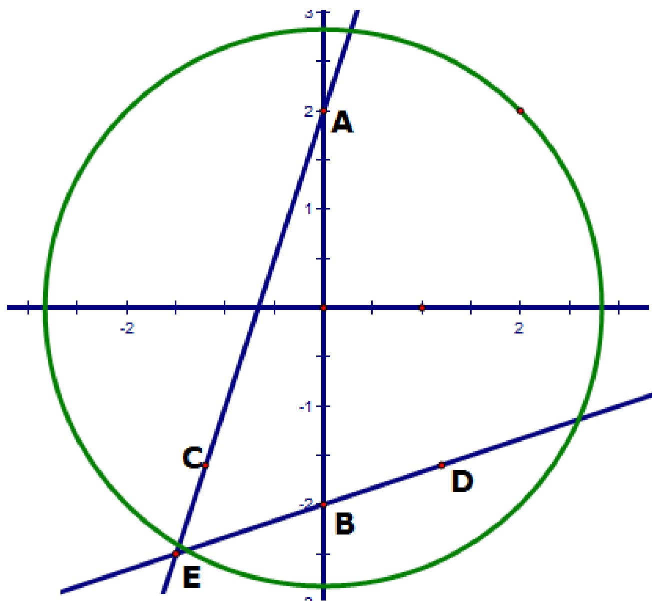
Vậy phương trình đường tròn thỏa yêu cầu bài toán là

$$(x-2)^2+(y-6)^2=1 \text{ hay } (x+2)^2+\left(y+\frac{7}{2}\right)^2=1$$

Câu 66. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(K): x^2+y^2=4$ và hai điểm A(0; 2), B(0; -2). Điểm C và D (C khác A và B) là hai điểm thuộc đường tròn (K) và đối xứng nhau qua trục tung. Biết rằng giao điểm E của hai đường AC và BD nằm trên đường tròn $(K_1): x^2+y^2+3x-4=0$, hãy tìm tọa độ điểm E.

(*Trích đề thi thử lần 5, Website: toanphothong.vn , năm 2012*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Ta có C, D thuộc đường tròn (K) mà lại đối xứng với nhau qua trục tung nên tọa độ 2 điểm có dạng:

$$C(a;b),\ D(-a;b),(a,b\neq 0)$$

Ta có: $a^2+b^2=4$ (1)

Khi đó ta dễ dàng viết được phương trình đường thẳng $\begin{cases} AC:(b-2)x-a(y-2)=0 \\ BD:(b+2)x+a(y+2)=0 \end{cases}$

* Toa độ E là nghiệm của hệ: $\begin{cases}(b-2)x-a(y-2)=0\\(b+2)x+a(y+2)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-2a}{b} \\ y=\dfrac{4}{b}\end{cases}$

* Vì E thuộc (K_1) nên ta có: $4\frac{a^2}{b^2}+\frac{16}{b^2}-\frac{6a}{b}-4=0 \Leftrightarrow 4a^2+16-6ab-4b^2=0$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được $4a=3b$.

Từ đó giải ra bài toán có 2 nghiệm hình là:

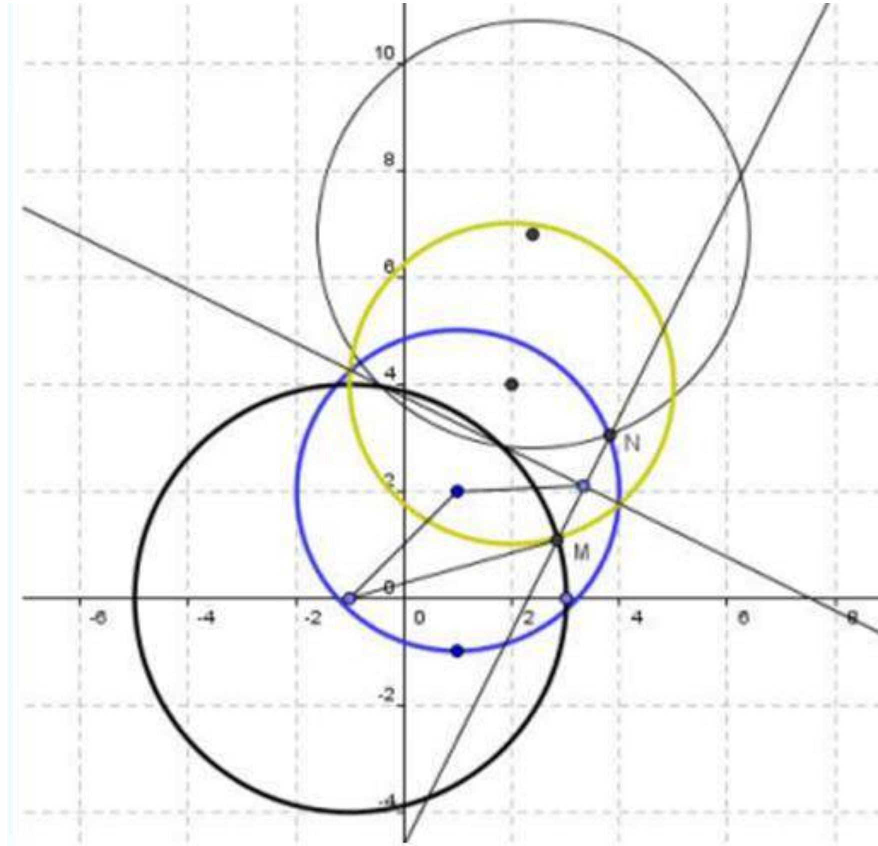
$$C\left(\frac{-6}{5};\frac{-8}{5}\right),D\left(\frac{6}{5};\frac{-8}{5}\right) \text{ hay } C\left(\frac{6}{5};\frac{8}{5}\right),D\left(\frac{-6}{5};\frac{8}{5}\right)$$

Vậy tọa độ điểm C và D thỏa yêu cầu bài toán là $C\left(\frac{-6}{5};\frac{-8}{5}\right),D\left(\frac{6}{5};\frac{-8}{5}\right) \text{ hay } C\left(\frac{6}{5};\frac{8}{5}\right),D\left(\frac{-6}{5};\frac{8}{5}\right)$

Câu 67. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $(C_1):(x-1)^2+(y-2)^2=9$ và $(C_2):(x+1)^2+y^2=16$ và đường thẳng d: 2x + 4y – 15 = 0. Tìm M thuộc (C_1) và N thuộc (C_2) sao ch MN nhận d là đường trung trực và N có hoành độ âm.

(Trích đề thi thử lần 6, Website: toanphothong.vn , năm 2012)

► **Hướng dẫn giải :**



* Nếu ta gọi M(a; b) và N(c; d) thì ta có 4 ẩn số cần tìm.

Ta có: $\begin{cases} M\in(C_1)\Rightarrow(a-1)^2+(b-2)^2=9 \\ N\in(C_2):(c+1)^2+d^2=16 \end{cases}$

* d là đường trung trực nên ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n_d}=0 \\ I\in d \end{cases}$ với I là trung điểm MN.

Vì thế ta thu được hệ phương trình: $\begin{cases} (a-1)^2+(b-2)^2=9 \\ (c+1)^2+d^2=16 \\ 2(a-c)+4(b-d)=0 \\ (a+c)+2(b+d)-15=0 \end{cases}$

* Hệ này chỉ là hệ bậc 2 nên ta có thể giải bằng cách từ 2 phương trình cuối ta sẽ rút các ẩn để thế vào 2 phương trình bên trên và cuối cùng ta được một hệ bậc 2 có hai ẩn.

Từ hệ: $\begin{cases} 2(a-c)+4(b-d)=0 \\ (a+c)+2(b+d)-15=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{15}{2}-2d \\ c=\dfrac{15}{2}-2b \end{cases}$

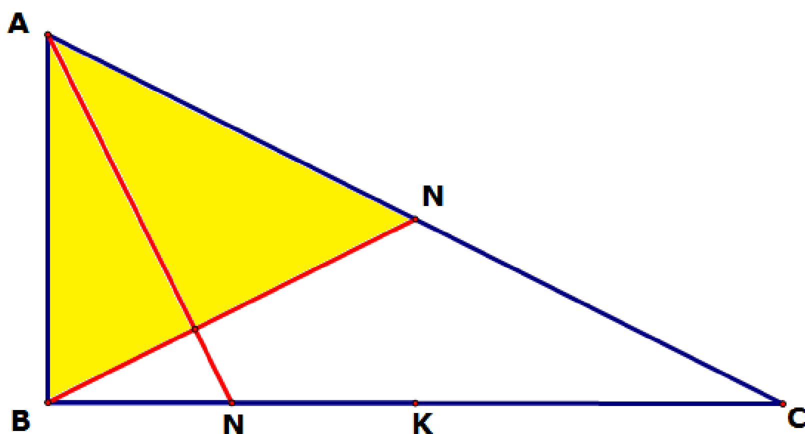
* Tới đây thì ta thay vào hệ phương trình đầu và được:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{13}{2}-2d\right)^2+(b-2)^2=9 \\ \left(\dfrac{17}{2}-2b\right)^2+d^2=16 \end{cases}$$ (việc giải tiếp hệ này xin danh cho bạn đọc)

Câu 68. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại B có BC = 2AB. Điểm M(2; -2) là trung điểm của cạnh AC. Gọi N là điểm trên cạnh BC sao cho BC = 4BN. Điểm $H\left(\frac{4}{5};\frac{8}{5}\right)$ là giao điểm AN và BM. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết N thuộc đường thẳng x + 2y – 6 = 0.

(*Trích đề thi thử lần 3, Website dethithudaihoc.com , năm 2013*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi K là trung điểm BC, đường trung bình $MK=\frac{AB}{2}=\frac{BC}{4}=BN$

Vì $\Delta ABN=\Delta BKM \Rightarrow \angle BNA=\angle BMK$ mà $\angle MBN+\angle BMK=90^0$. Do đó $\angle BHN=90^0$

* $\overrightarrow{MH}=\left(\frac{-6}{5};\frac{18}{5}\right)$, phương trình AN là:

$$\frac{-6}{5}\left(x-\frac{6}{5}\right)+\frac{18}{5}\left(y-\frac{8}{5}\right)=0 \Leftrightarrow x-3y+4=0$$

* Khi đó tọa độ N là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+2y-6=0 \\ x-3y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{N(2;2)}$

* Mặt khác, $\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{BN} \Rightarrow B\left(b;\frac{b}{3}+3\right)$. Mà $B\in BM \Rightarrow 3b+4+\frac{b}{3}-4=0 \Leftrightarrow b=0 \Rightarrow \boxed{B(0;4)}$

Vậy tọa độ các điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-4;0),B(0;4),C(8;-4)}$

Câu 69. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có $\angle ABC=60^0$, đường tròn (C), có tâm I bán kính là 2 tiếp xúc với tất cả các cạnh của hình thoi (tiếp xúc với AB và CD lần lượt tại M và N, tung độ của I dương). Biết phương trình đường thẳng $MN: x+\sqrt{3}y-1=0$, đường thẳng chứa cạnh AD không vuông góc với trục tung và đi qua điểm P(3; 0). Viết phương trình các đường thẳng chứa cạnh AB, AD.

(*Trích đề thi thử THPT Chuyên Bắc Ninh, năm 2014*)

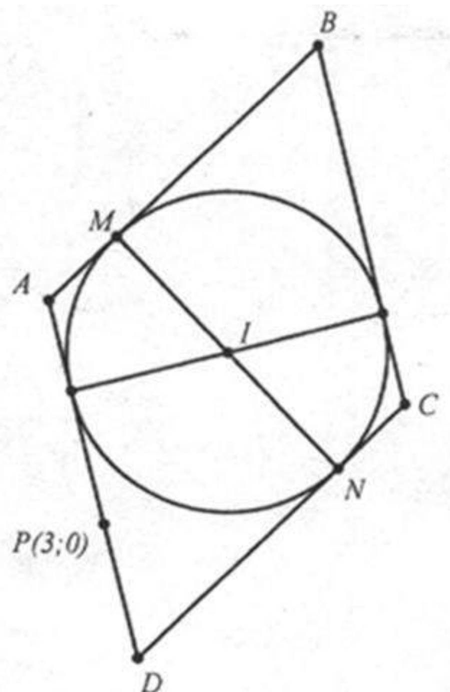
► **Hướng dẫn giải :**

* Do AB vuông góc MN nên AB có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_{AB}}=(\sqrt{3};-1)$.

Gọi vecto pháp tuyến của AD là $\overrightarrow{n_{AD}}=(a;b)\ (a^2+b^2>0)$

Do

$\angle DAB = 120^0 \Rightarrow |\cos(\overrightarrow{n_{AB}};\overrightarrow{n_{AD}})| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|a\sqrt{3}-b|}{2\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a^2 - 2\sqrt{3}ab = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0\,(ktm) \\ a = b\sqrt{3} \end{array}\right.$



* Với $a = b\sqrt{3}$ ta chọn $a = \sqrt{3} \Rightarrow b = 1$

AD đi qua P(3;0) có vecto pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{AD}} = (\sqrt{3};1)$ nên có phương trình là:

$$\boxed{AD: \sqrt{3}x + y - 3\sqrt{3} = 0}$$

* Vì I thuộc MN nên $I\left(1 - a\sqrt{3}; a\right)$. Ta có:

$$d(I;AD) = 2 \Rightarrow \frac{|-3a + \sqrt{3} + a - 3\sqrt{3}|}{2} = 2 \Leftrightarrow |a + \sqrt{3}| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 - \sqrt{3} \\ a = -2 - \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Do I có tung độ dương nên ta nhận $\boxed{I(4 - 2\sqrt{3}; 2 - \sqrt{3})}$

* Gọi $M(1 - m\sqrt{3}; m)$, ta có:

$$IM = 2 \Leftrightarrow (m\sqrt{3} + 3 - 2\sqrt{3})^2 + (m + \sqrt{3} - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 - \sqrt{3} \\ m = 1 - \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Với $m = 3 - \sqrt{3} \Rightarrow M\left(4 - 3\sqrt{3}; 3 - \sqrt{3}\right) \Rightarrow AB: \sqrt{3}x - y + 12 - 5\sqrt{3} = 0$ (loại vì góc $\angle ABC = 120^0$)

Với $m = 1 - \sqrt{3} \Rightarrow M\left(4 - \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3}\right) \Rightarrow AB: \sqrt{3}x - y + 4 - 5\sqrt{3} = 0$ (loại vì góc $\angle ABC = 120^0$)

Vậy phương trình thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{\left\{\begin{array}{l} AB: \sqrt{3}x - y + 4 - 5\sqrt{3} = 0 \\ AD: \sqrt{3}x + y - 3\sqrt{3} = 0 \end{array}\right.}$

Câu 70. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: 3x - 4y - 8 = 0,\ d_2: 4x + 3y - 19 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1; d_2$ đồng thời cắt đường thẳng $2x - y - 2 = 0$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 2\sqrt{5}$

(Trích phần cơ bản đề thi thử Website nguoithay.vn, năm 2013)

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi I(a; b) là tọa độ tâm và R là bán kinh của đường tròn cần tìm.

Do đường thẳng 2x – y – 2 = 0 cắt (C) tại A, B với $AB = 2\sqrt{5}$ nên ta có:

$$d(I;\Delta) = \sqrt{R^2 - 5} \Leftrightarrow \frac{|2a - b - 2|}{\sqrt{5}} = \sqrt{R^2 - 5}$$

* Đường tròn (C) tiếp xúc với $d_1: 3x - 4y - 8 = 0,\ d_2: 4x + 3y - 19 = 0$ khi:

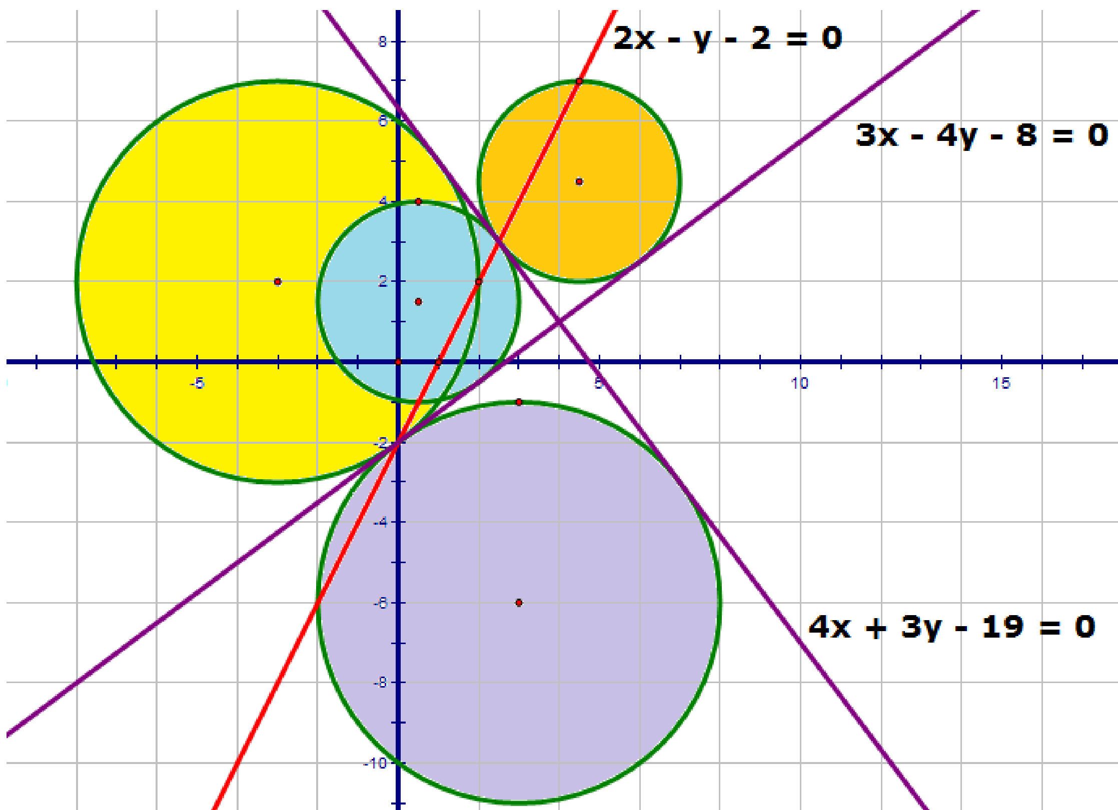
$$\begin{cases} d(I;d_1) = R \\ d(I;d_2) = R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|3a - 4b - 8|}{5} = R \\ \dfrac{|4a - 3b - 19|}{5} = R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|3a - 4b - 8|}{5} = R \\ 3a - 4b - 8 = \pm(4a - 3b - 19) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = 7a - 27 \\ R = |5a - 20| \end{cases} \\ \begin{cases} a = 7b + 11 \\ R = |5b - 5| \end{cases} \end{array}\right.$$

* Với $\begin{cases} b = 7a - 27 \\ R = |5a - 20| \end{cases}$, thay vào (*), ta có: $\sqrt{5}|a - 5| = \sqrt{(5a - 20)^2 - 5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = \dfrac{9}{2} \end{array}\right.$

* Với $\begin{cases} a = 7b + 11 \\ R = |5b - 5| \end{cases}$, thay vào (*), ta có: $\sqrt{5}|3b - 4| = \sqrt{(5b - 5)^2 - 5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2 \\ b = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình đường tròn thỏa yêu cầu bài toán là

$$\left[\begin{array}{l} (C): (x - 3)^2 + (y + 6)^2 = 25 \ hay\ (C): (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25 \\ (C): \left(x - \dfrac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{9}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}\ hay\ (C): \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4} \end{array}\right.$$



Câu 71. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C_1): (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$ có tâm I_1 và đường thẳng $\Delta: 3x - 2y - 7 = 0$. Đường tròn (C_2) có bán kinh bằng $\sqrt{10}$ cắt đường tròn (C_1) tại hai điểm A và B, tâm I_2 nằm trên đường thẳng Δ sao cho diện tích tứ giác I_1AI_2B bằng 15. Viết phương trình đường tròn (C_2).

(Trích phần nâng cao đề thi thử Website nguoithay.vn, năm 2013)

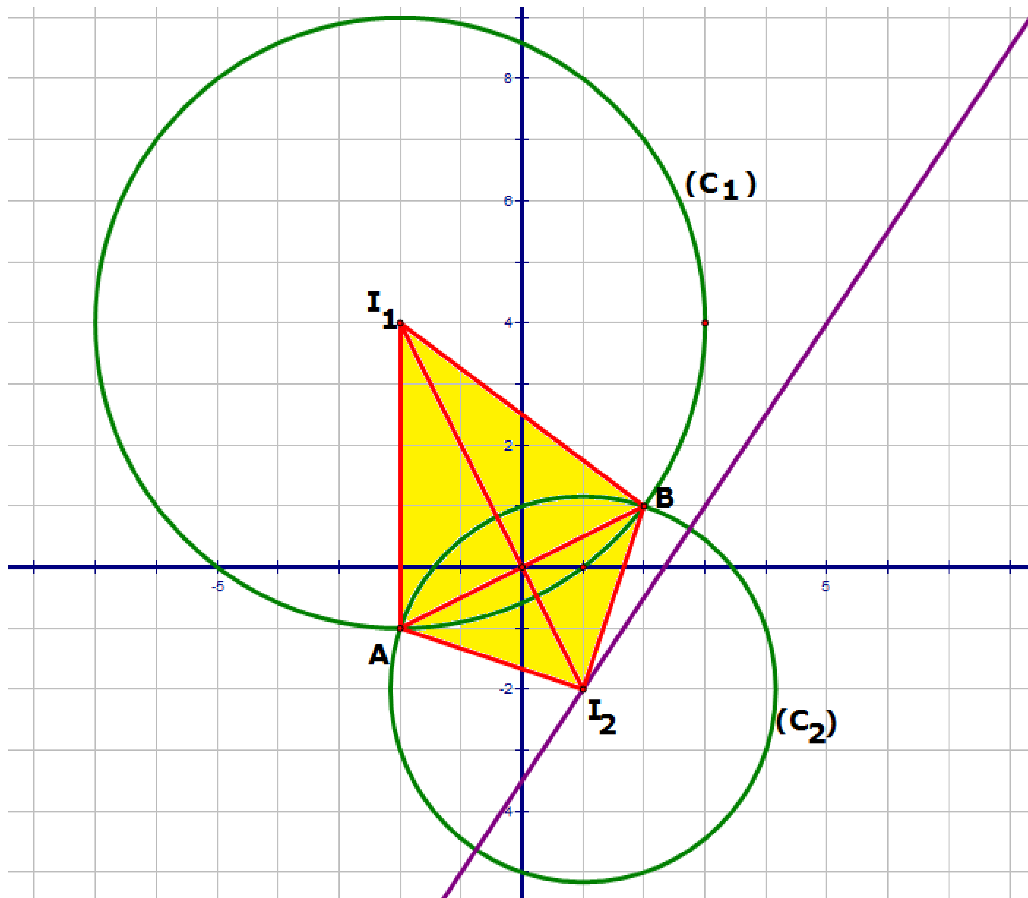
▶ **Hướng dẫn giải :**

* Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(-2;4)$ và bán kính $R_1 = 5$

Do I_2 nằm trên đường thẳng Δ nên $I_1I_2 < d(I_1;\Delta) = \dfrac{21\sqrt{13}}{13}$

Đặt góc $\angle I_1AI_2 = \varphi$. Ta có $2S_{I_1AI_2} = S_{I_1AI_2B} \Leftrightarrow AI_1.AI_2 \sin\varphi = S_{I_1AI_2B}$

$$5\sqrt{10}\sin\varphi = 15 \Leftrightarrow \sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ \cos\varphi = \dfrac{-1}{\sqrt{10}} \end{array}\right.$$



* Với $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, theo định lý hàm cosin, ta có:

$$I_1I_2^2 = AI_1^2 + AI_2^2 - 2AI_1AI_2\cos\varphi = 25 \Rightarrow I_1I_2 = 5\ (ktm(*))$$

* Với $\cos\varphi = \dfrac{-1}{\sqrt{10}}$, tương tự ta có $I_1I_2 = 3\sqrt{5}\ (tm(*))$

Gọi $I_2(a;b)$. Ta có: $\begin{cases} I_2 \in \Delta \\ I_1I_2^2 = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b - 7 = 0 \\ (a+2)^2 + (b-4)^2 = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} hay \begin{cases} a = \dfrac{61}{13} \\ b = \dfrac{46}{13} \end{cases}$

Vậy phương trình đường tròn điểm thỏa yêu cầu bài toán là

$$\boxed{(C):(x-1)^2 + (y+2)^2 = 10\ hay\ (C):\left(x - \frac{61}{13}\right)^2 + \left(y - \frac{46}{13}\right)^2 = 10}$$

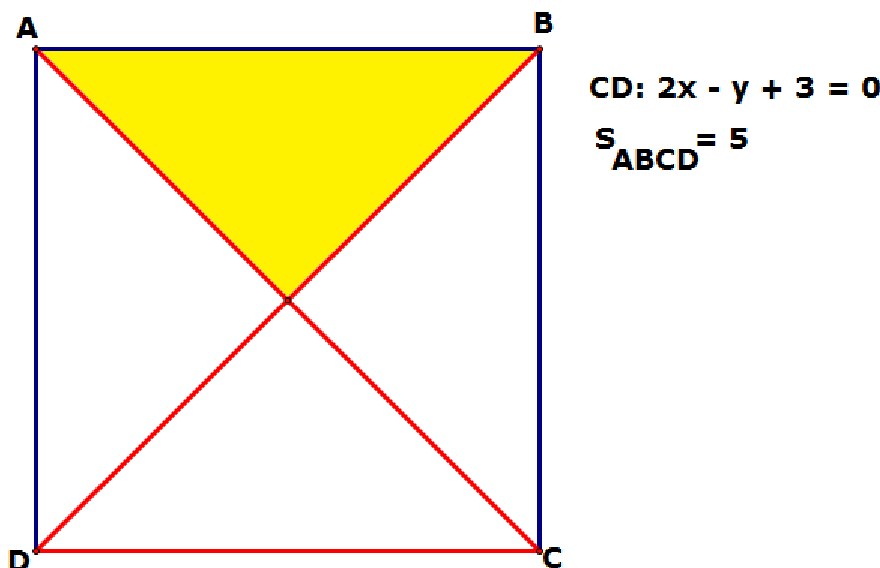
Câu 72. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD trong đó A thuộc đường thẳng $x + y - 1 = 0$ và

đường thẳng CD có phương trình $2x-y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông biết hình vuông có diện tích bằng 5 biết rằng C có hoành độ âm.

(Trích đề thi thử lần 2, THPT Nguyễn Trung Thiên, Hà Tĩnh, năm 2012)

▶ **Hướng dẫn giải :**

* Ta có: $d(A;CD)=\dfrac{|2a-(1-a)+3|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow|3a+2|=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\ a=\dfrac{-7}{5}\end{array}\right.$



* Với a = 1 suy ra A(1; 0).

Phương trình cạnh AD qua A và vuông góc CD là: $(x-1)+2(y-0)=0\Leftrightarrow\boxed{AD:x+2y-1=0}$

Khi đó: $D=AD\cap CD$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}x+2y-1=0\\ 2x-y+3=0\end{cases}\Rightarrow\boxed{D(-1;1)}$

Đường tròn tâm D bán kinh $\sqrt{5}$ có phương trình : $(D):(x+1)^2+(y-1)^2=5$

Mặt khác $C=CD\cap(D)\Rightarrow\begin{cases}2x-y-3=0\\ (x+1)^2+(y-1)^2=5\end{cases}\Rightarrow\boxed{C(0;3)\ hay\ C(-2;-1)}$

Do C có hoành độ dương nên ta nhận C(-2; -1)$\Rightarrow O\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ (O là giao điểm 2 đường chéo AC và BD) suy ra B(2; 2)

* Với $a=\dfrac{-7}{3}\Rightarrow A\left(\dfrac{-7}{3};\dfrac{10}{3}\right)$. Gọi M là giao điểm giữa d và CD ta có $M\left(\dfrac{-2}{3};\dfrac{5}{3}\right)$. Giải tương tự ta thấy các tung độ của C đều dương nên trong trường hợp này không thỏa mãn.

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(1;0),\ B(2;2),\ C(-2;-1),D(-1;1)}$

Câu 73. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang *ABCD* vuông tại *A, D* có $B(8;4)$, $CD=2AB$ và phương trình đường thẳng *AD* là $x-y+2=0$. Điểm $M\left(\dfrac{82}{13};\dfrac{6}{13}\right)$ thuộc đường thẳng *AC*. Tìm tọa độ các điểm *A, C, D*.

(Trích đề thi thử lần 2, THPT Chuyên Vĩnh Phúc, năm 2015)

▶ **Hướng dẫn giải :**

* Phương trình đường thẳng $AB:x+y-12=0$. Suy ra tọa độ của $A(5;7)$

* Do $M\left(\frac{82}{13};\frac{6}{13}\right)\in AC \Rightarrow$ phương trình đường thẳng $AC: 5x+y-32=0$

* $D(a;a+2)\in AD$. Do $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}\Rightarrow C(a+6;a-4)$

* Do $C\in AC\Rightarrow a=1$ Vậy, $A(5;7), D(1;3)$ và $C(7;-3)$.

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(5;7),\ C(7;-3),\ D(1;3)}$

Câu 74. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC. Đường thẳng d song song với BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M và N sao cho AM = CN. Biết rằng M(–4; 0), C(5; 2) và chân đường phân giác trong của góc A là D(0; –1). Hãy tìm tọa độ của A và B.

(*Trích đề thi thử lần 1, THPT Đoàn Thượng, Hải Dương, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**

- Gọi D' là điểm trên cạnh BC sao cho CD' = MN.

  Ta có MNCD' là hình bình hành

  ⇒ MD' = CN = AM ⇒ Δ AMD' cân tại M

  ⇒ ∠ MD'A = ∠ MAD' = D'AC

  ⇒ AD' là phân giác của góc A ⇒ D' trùng D. CA qua C và song song MD

  ⇒ CA có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{MD}=(4;-1)$

  ⇒ AC: $\begin{cases}x=5+4t\\ y=2-t\end{cases}(t\in R)$.

* A ∈ AC ⇒ A(5 + 4a; 2 – a) ⇒ $\overrightarrow{MA}=(9+4a;2-a)$

  Ta có MA = MD ⇔ $(9+4a)^2+(2-a)^2=17$

  ⇔ $17a^2+68a+85-17=0$ ⇔ a = –2 suy ra **A(–3; 4).**

* $\overrightarrow{MA}=(1;4)$ ⇒ AB: $\frac{x+4}{1}=\frac{y}{4}\Leftrightarrow 4x-y+16=0$

  $\overrightarrow{DC}=(5;3)\Rightarrow$ BC: $\frac{x}{5}=\frac{y+1}{3}\Leftrightarrow 3x-5y-5=0$.

  Do đó B: $\begin{cases}4x-y=-16\\ 3x-5y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5\\ y=-4\end{cases}$. Vậy **B(–5; –4).**

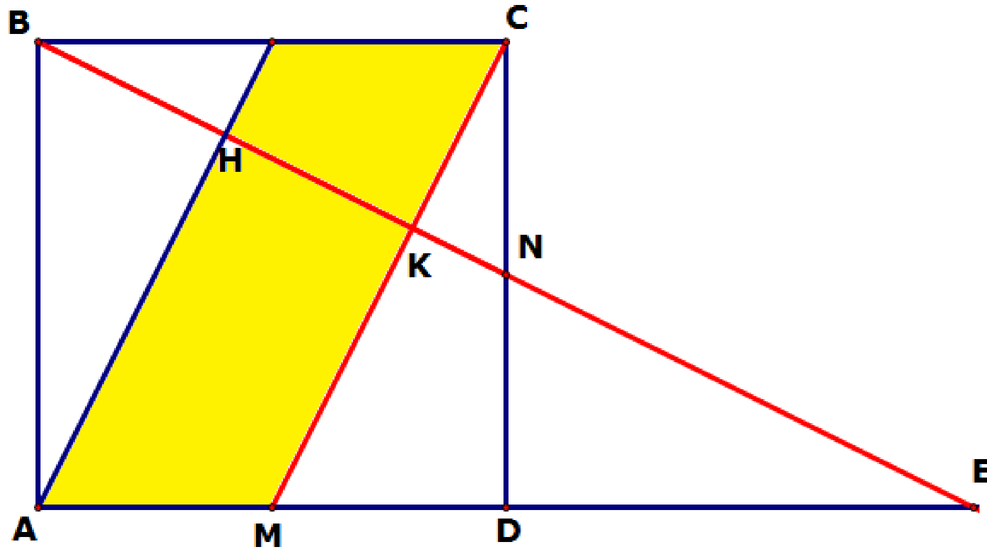
Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-3;4),\ B(-5;-4)}$

Câu 75. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông *ABCD* có $A(-1;2)$. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của cạnh *AD* và *DC*; *K* là giao điểm của *BN* với *CM*. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác

BMK, biết *BN* có phương trình $2x+y-8=0$ và điểm *B* có hoành độ lớn hơn 2.

(***Trích đề thi thử THPT Chuyên Hưng Yên, năm 2015***)

▶ **Hướng dẫn giải :**



* Gọi E = BN $\cap$ AD $\Rightarrow$ D là trung điểm của AE

Dựng AH $\perp$ BN tại H $\Rightarrow$ $AH = d(A; BN) = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$

Trong tam giác vuông ABE: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{5}{4AB^2}$

$\Rightarrow AB = \dfrac{\sqrt{5}.AH}{2} = 4$

* B $\in$ BN $\Rightarrow$ B(b; 8 - 2b) (b > 2) và AB = 4 $\Rightarrow$ B(3; 2)

* Phương trình AE: x + 1 = 0

E = AE $\cap$ BN $\Rightarrow$ E(-1; 10) $\Rightarrow$ D(-1; 6) $\Rightarrow$ M(-1; 4)

* Gọi I là tâm của (BKM) $\Rightarrow$ I là trung điểm của BM $\Rightarrow$ I(1; 3)

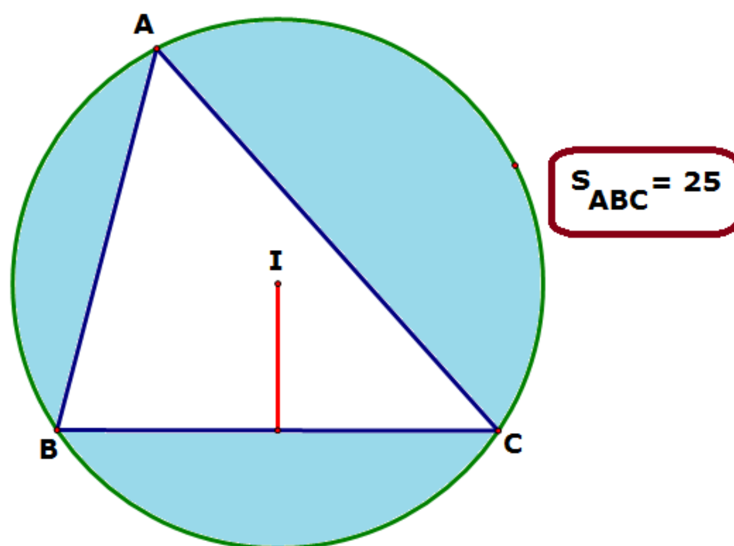
$R = \dfrac{BM}{2} = \sqrt{5}$. Vậy phương trình đường tròn: $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

Vậy phương trình đường tròn thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{(C): (x-1)^2 + (y-3)^2 = 5}$

Câu 76. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm A(4;2), B(-3;1), C là điểm có hoành độ dương nằm trên đường thẳng (d): x + y = 0. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, biết diện tích tam giác ABC bằng 25.

(***Trích đề thi thử lần 1, THPT Chí Linh, Hải Dương, năm 2014***)

▶ **Hướng dẫn giải :**



* $\overrightarrow{AB}$ =(-7;-1) là véc tơ chỉ phương của AB nên véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;-7) \Rightarrow$ phương trình AB:

$$1(x-4)-7(y-2)=0 \Leftrightarrow x-7y+10=0$$

* $C \in (d) \Rightarrow C(c;-c)\ (c>0)$

Ta có: $\Rightarrow d(C,AB) = \dfrac{|c+7c+10|}{\sqrt{1^2+7^2}} = \dfrac{|8c+10|}{\sqrt{50}}; AB = \sqrt{50}$

* Diện tích tam giác ABC bằng 25 nên ta có

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}d(C,AB).AB = \frac{|8c+10|}{2\sqrt{50}}.\sqrt{50} = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=5 \\ c=-\dfrac{15}{2}<0 \end{array}\right. \Rightarrow C(5;-5)$$

* Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình là:

$$(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0\ (a^2+b^2-c>0)$$

Do A, B, C nằm trên (C) nên ta có hệ

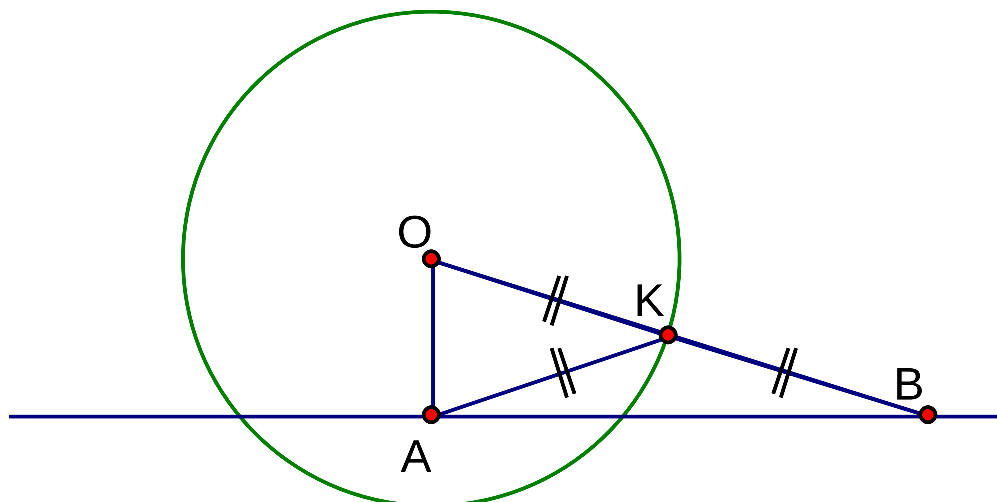
$$\begin{cases} 4^2+2^2-8a-4b+c=0 \\ (-3)^2+1^2+6a-2b+c=0 \\ 5^2+(-5)^2-10a+10b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8a-4b+c=-20 \\ 6a-2b+c=-10 \\ -10a+10b+c=-50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-20 \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{(C): x^2+y^2-2x+4y-20=0}$

Câu 77. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 5$ tâm O, đường thẳng (d) có phương trình 3x – y – 2 = 0. Tìm tọa độ các điểm A, B trên (d) sao cho OA = $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ và đoạn OB cắt (C) tại K sao cho KA = KB.

(Trích đề thi thử THPT Tĩnh Gia 2, Thanh Hóa, năm 2015)

► **Hướng dẫn giải :**



* (C): $x^2 + y^2 = 5$ có tâm O(0;0) bán kính R = $\sqrt{5}$.

Ta có d(O;d) = $\frac{\sqrt{10}}{5}$ =OA $\Rightarrow$ OA $\perp$ (d)

A $\in$ (d) $\Rightarrow$ A(t; 3t – 2) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OA}$=(t; 3t – 2)

Mặt khác (d) có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_d}$ =(1;3). Ta có: $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{u_d}$ = 0

$\Leftrightarrow$ t + 3(3t – 2) = 0 $\Leftrightarrow$ t = $\frac{3}{5}$ $\Rightarrow A\left(\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right)$

* Ta có Δ OAB vuông tại A, KA = KB $\Rightarrow$ KA = KB = OK $\Rightarrow$ K là trung điểm OB

$\Rightarrow$ OB = 2OK = 2 $\sqrt{5}$

* Vì B $\in$ (d) $\Rightarrow$ B(b; 3b – 2). Ta có $OB^2 = 20 \Leftrightarrow b^2 + (3b-2)^2 = 20$

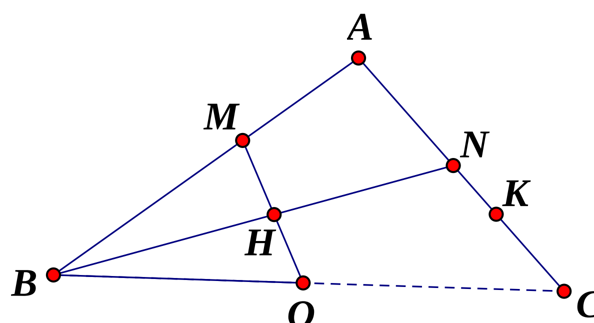
$\Leftrightarrow 5b^2 - 6b - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2 \Rightarrow B(2;4) \\ b = -\frac{4}{5} \Rightarrow B\left(-\frac{4}{5};-\frac{22}{5}\right)\end{array}\right.$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A\left(\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right), B(2;4) \text{ hay } A\left(\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right), B\left(\frac{-4}{5};\frac{-22}{5}\right)}$

Câu 78. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A ,biết B và C đối xứng nhau qua gốc toạ độ O .Đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là d: x + 2y – 5 = 0. Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác ABC, biết đường thẳng AC đi qua K(6;2).

(*Trích đề thi thử lần 2, THPT Thường Xuân 3, Thanh Hóa, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi B(5 – 2 t; t) thuộc đường thẳng d .

Do B,C đối xứng nhau qua O(0;0) nên O là trung điểm của BC toạ độ của $C(2t-5;-t)$

* Gọi đường thẳng d' đi qua O vuông góc với phân giác trong góc B tại H vá cắt AB tại M

Ta có phương trình d': 2x – y = 0 .

Toạ độ giao điểm H là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} x+2y-5=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ suy ra H(1;2)

* Trong tam giác BOM có BH là đường cao và là phân giác suy ra H là trung điểm của OM toạ độ M (2;4)

Ta có $\overrightarrow{BM}=(2t-3;4-t)$;$\overrightarrow{CK}(11-2t;2+t)$. Theo giả thiết tam giác ABC vuông tại A nên

$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CK}=0 \Leftrightarrow (2t-3)(11-2t)+(4-t)(2+t)=0 \Leftrightarrow -5t^2+30t-25=0$ giải ra $\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=5 \end{array}\right.$

* Với t = 1 ta có B(3;1) C(–3; –1), $\overrightarrow{BM}$ (-1;3)

Ta có phương trình AB: 3x + y – 10 = 0, AC: – x + 3y = 0

Toạ độ A (3;1) loại vì trùng với B

* Với t = 5 ta có B(–5;5) C(5; –5), $\overrightarrow{BM}$ (7; –1)

Ta có phương trình AB: x + 7y – 30 = 0, AC: 7x – y – 40 = 0

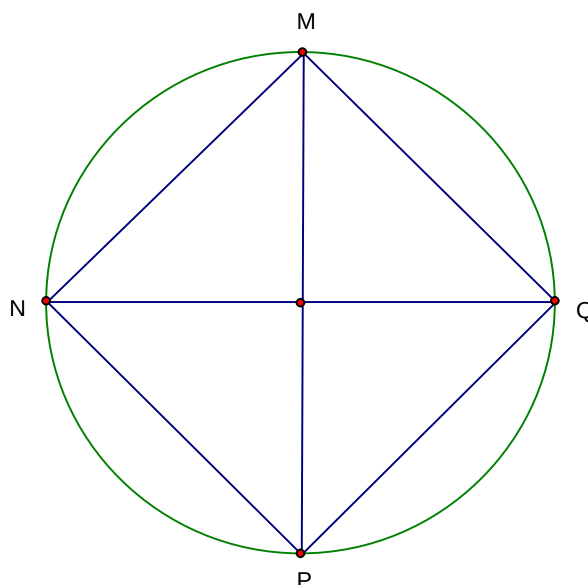
Toạ độ $A\left(\frac{31}{5};\frac{17}{5}\right)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A\left(\frac{31}{5};\frac{17}{5}\right), B(-5;5), C(5;-5)}$

Câu 79. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+6y+4=0$.Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của hình vuông $MNPQ$ nội tiếp đường tròn (C) biết điểm $M(2;0)$.

(*Trích đề thi thử THPT Thiệu Hóa, Thanh Hóa, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Đường tròn có tâm $I(2;-3)$, bán kính $R=3$.

Hình vuông $MNPQ$ nội tiếp đường tròn (C) nên tâm hình vuông cũng là tâm $I(2;-3)$ của đường tròn, hay I là trung điểm của MP, suy ra tọa độ điểm $P(2;-6)$

* Gọi $\vec{n_1}(a;b)(a^2+b^2\neq 0)$ là véctơ pháp tuyến của đường thẳng chứa cạnh hình vuông,

Vì $\overrightarrow{PM}(0;6)$ nên đương thẳng *MP* có véc tơ pháp tuyến: $\overrightarrow{n_2}(1;0)$. Các cạnh của hình vuông hợp với đường chéo *MP* một góc 45^0.nên ta có:

$$\left|\cos\left(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right)\right| = \cos 45^0 \Leftrightarrow \left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2},\sqrt{1^2+0^2}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{a^2+b^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a^2 = a^2+b^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=-b \end{array}\right.$$

Vậy có hai véctơ pháp tuyến là: $\vec{n}=(1;1)$ và $\vec{n}'=(1;-1)$

* Cặp đường thẳng có véctơ pháp tuyến $\vec{n}(1;1)$:

+) Đi qua $M(2;0)$: $x+y-2=0$

+) Đi qua $P(2;-6)$: $x+y+4=0$

* Cặp đường thẳng có véctơ pháp tuyến $\vec{n}(1;-1)$:

+) Đi qua $M(2;0)$: $x-y-2=0$

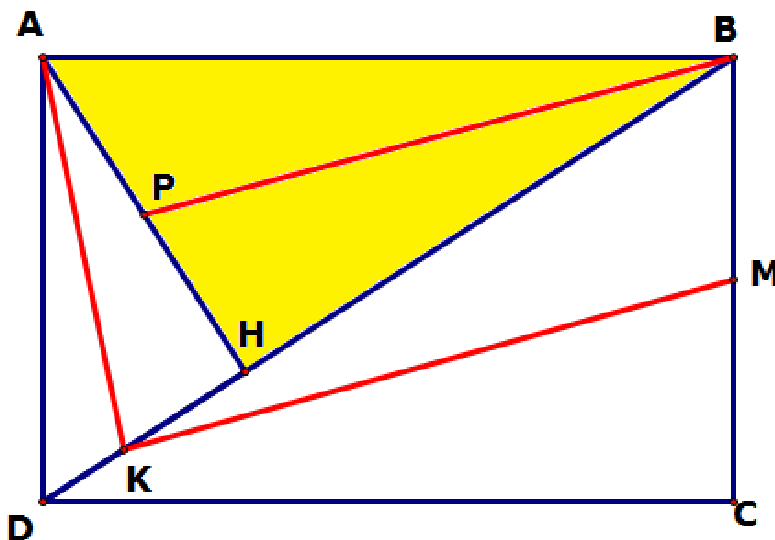
+) Đi qua $P(2;-6)$: $x-y-8=0$

Vậy phương trình đường thẳng chứa các cạnh của hình vuông MNPQ là $\left\{\begin{array}{l} x+y-2=0 \\ x+y+4=0 \\ x-y-2=0 \\ x-y-8=0 \end{array}\right.$

Câu 80. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm H(1;2) là hình chiếu vuông góc của A lên BD. Điểm $M\left(\frac{9}{2};3\right)$ là trung điểm của cạnh BC, phương trình đường trung tuyến kẻ từ A của Δ ADH là d: $4x+y-4=0$. Viết phương trình cạnh BC.

(Trích đề thi thử lần 2, THPT Triệu Sơn 5, Thanh Hóa, năm 2015)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi K là trung điểm của HD. chứng minh AN vuông góc với MN. Gọi P là trung điểm của AH.Ta có AB vuông góc với KP, Do đó P là trực tâm của tam giác ABK.

Suy ra BP $\perp AK \Rightarrow AK \perp KM$

* Phương trình KM: đi qua $M\left(\frac{9}{2};3\right)$ và vuông góc với AN có phương trình:

MK: $x-4y+\frac{15}{2}=0$ suy ra Toạ độ $K\left(\frac{1}{2};2\right)$

* Do K là trung điểm của HD nên D(0;2)

Suy ra phương trình (BD): y – 2 = 0

AH: x – 1 = 0 và A(1; 0) suy ra AD: 2x + y – 2 = 0

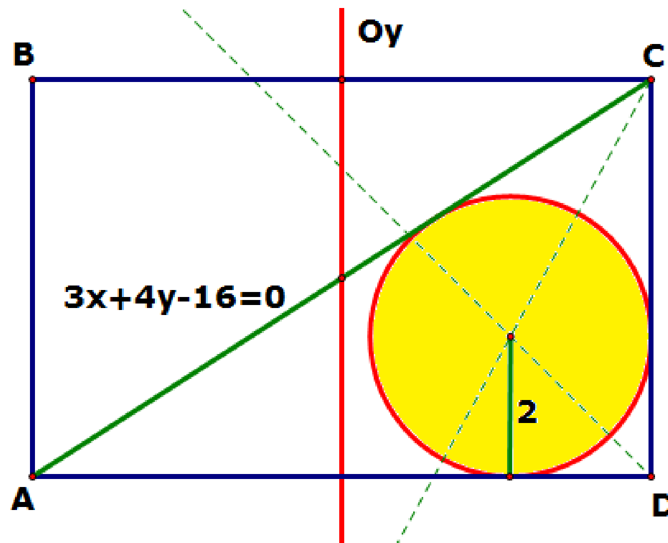
* BC qua M và song song với AD nên BC: 2x + y – 12 = 0.

Vậy phương trình thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{BC: 2x+y-12=0}$

Câu 81. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Hai điểm B và C thuộc trục tung. Phương trình đường chéo AC: 3x + 4y – 16 = 0. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật đã cho, biết rằng bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ACD bằng 1.

(***Trích đề thi thử số 1, Website toanphothong.com , năm 2015***)

► **Hướng dẫn giải :**



* Ta có C là giao điểm của trục tung và đường thẳng AC nên C(0;4) .

Vì bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ACD bằng 1 nên bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC cũng bằng 1 .

* Vì B nằm trên trục tung nên B(0;b). Đường thẳng AB đi qua B và vuông góc với BC $\equiv Oy: x=0$ nên AB : y = b .

* Vì A là giao điểm của AB và AC nên $A\left(\frac{16-4b}{3};b\right)$.

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Ta có

$$r=\frac{2S_{ABC}}{AB+BC+CA}=\frac{|b-4|.\left|\frac{16-4b}{3}\right|}{|b-4|+\left|\frac{16-4b}{3}\right|+\sqrt{(b-4)^2+\left(\frac{16-4b}{3}\right)^2}}=\frac{\frac{4}{3}|b-4|^2}{|b-4|+\frac{4}{3}|b-4|+\frac{5}{3}|b-4|}$$

$$\Rightarrow r=\frac{1}{3}|b-4|\ .$$

* Theo giả thiết r = 1 nên ta có b = 1 hoặc b = 7 .

Với b = 1 ta có A(4; 1), B(0; 1). Suy ra D(4; 4) .

Với b = 7 ta có A(–4; 7), B(0; –7). Suy ra D(–4; 4) .

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{\left[\begin{array}{l}A(4;1),\ B(0;1),\ C(0;4),\ D(4;4)\\ A(-4;7),\ B(0;-7),\ C(0;4),\ D(-4;4)\end{array}\right.}$

Câu 82. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trung điểm cạnh BC là M(3; –1). Tọa độ điểm

E(–1; –3) thuộc đường thẳng chứa đường cao qua đỉnh B. Đường thẳng AC qua F(1; 3). Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có đường kinh AD với D(4; –2)

(*Trích đề thi thử lần 1, THPT Nguyễn Trung Thiên, Hà Tĩnh, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi H là trực tâm tam giác ABC suy ra BDCH là hình bình hành

Suy ra M là trung điểm của DH suy ra **H(2; 0).**

* Đường thẳng AC đi qua F(1; 3) và nhận $\overrightarrow{HE}=(-3;-3)$ làm vecto pháp tuyến nên phương trình:

$$1(x-1)+1(y-3)=0 \Leftrightarrow \boxed{AC: x-y-4=0}$$

Đường cao BH qua H và E nên phương trình BH là x – y – 2 = 0.

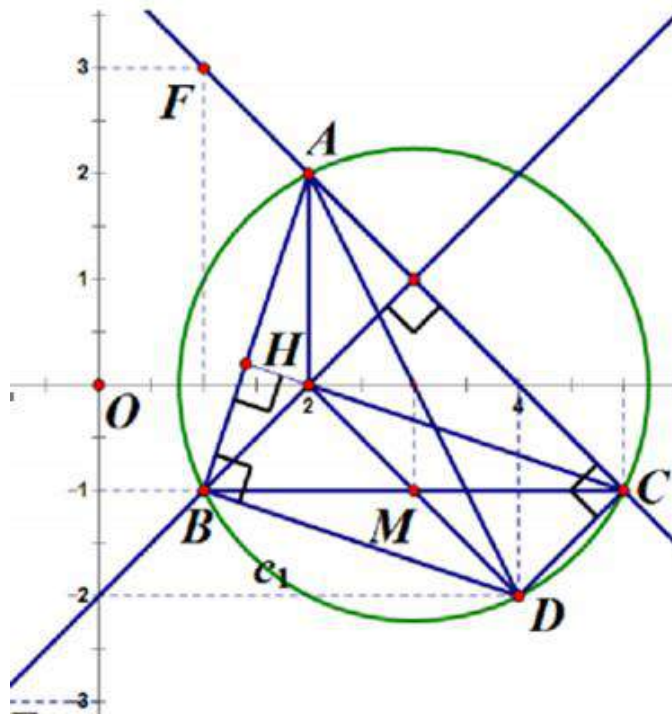
* Gọi tọa độ B, C là: $B(b;b-2),\ C(c;4-c)$. Do M là trung điểm BC nên ta có hệ:

$$\begin{cases} b+c=6 \\ b-c+2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ c=5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(1;-1), C(5;-1)}$$

* Đường cao AH đi qua H và vuông góc BC nên AH có phương trình x = 2. Tọa độ A thỏa hệ:

$$\begin{cases} x=2 \\ x+y-4= \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(2;2)}$$

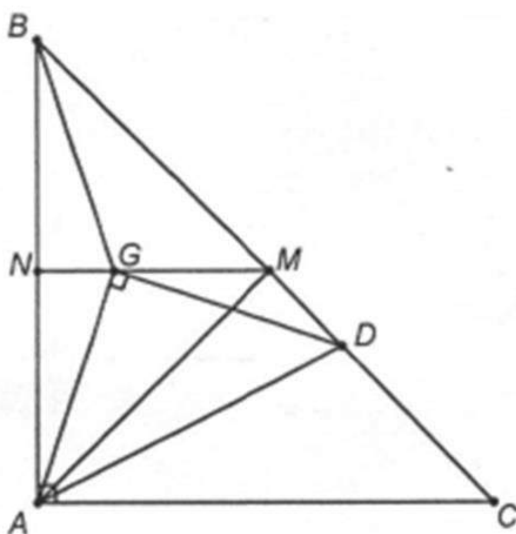
Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(2;2),\ B(1;-1),\ C(5;-1)}$



Câu 83. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của đoạn BC, G là trọng tâm tam giác ABM, $D(7;-2)$ là điểm nằm trên đoạn MC sao cho GA = GD. Viết phương trình đường thẳng AB của tam giác ABC biết đỉnh A có hoành độ nhỏ hơn 4 và phương trình AG là $3x-y-13=0$

(*Trích đề thi thử lần 1, THPT Chuyên Bắc Ninh, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi N là trung điểm của AB thì MN là trung trực của đoạn AB (do GB = GA = GD)

Nên G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD, mà góc $\angle ABM = 45^0$, nên $\angle AGD = 90^0$

Nghĩa là tam giác ADG vuông cân tại G.

* Ta có: $AG = GD = d(D; AG) = \frac{|3.7 + 2 - 13|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

Gọi tọa độ điểm $A(a;3a-13)$ ta có:

$$AD = AG\sqrt{2} \Leftrightarrow (a-7)^2 + (3a-13+2)^2 = 20 \Leftrightarrow a^2 - 8a + 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5\ (ktm) \\ a = 3\ (tm) \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{A(3;-4)}$$

* Ta có $NG = \frac{1}{3}NA \Rightarrow \cos\angle BAG = \frac{AN}{AG} = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Gọi vecto pháp tuyến của AB là $\overrightarrow{n_{AB}} = (a;b)\ (a^2 + b^2 > 0)$

$$\text{Ta có } \cos\angle BAG = \left|\cos\left(\vec{n}; \overrightarrow{n_{AG}}\right)\right| = \frac{|3a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow 6ab + 8b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ 3a = -4b \end{array}\right.$$

* Với $3a = -4b$ chọn a = 4 suy ra b = - 3, khi đó AB: 4x – 3y – 24 = 0 loại)

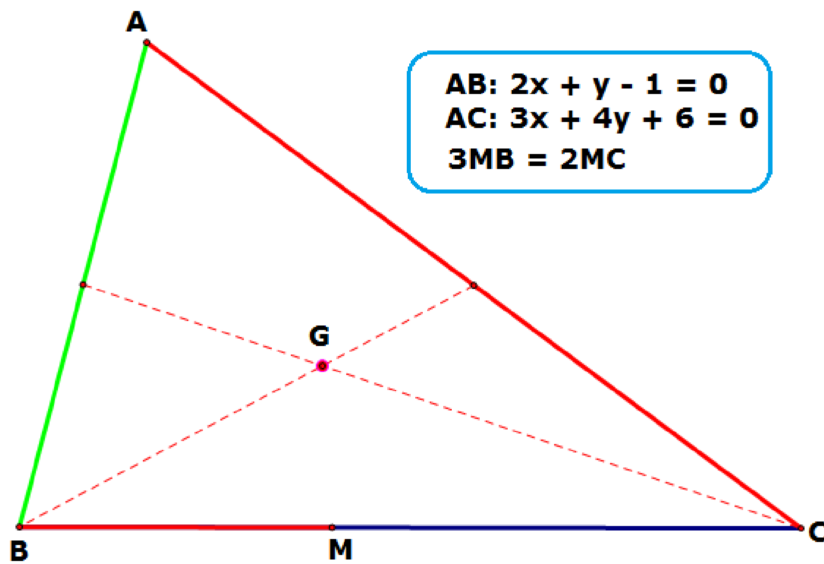
Với b = 0, chọn a = 1 nên phương trình AB: x – 3 = 0 (thỏa mãn).

Vậy phương trình thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{AB: x - 3 = 0}$

Câu 84. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng $AB: 2x + y - 1 = 0$, phương trình đường thẳng $AC: 3x + 4y + 6 = 0$ và điểm $M(1;-3)$ nằm trên đường thẳng BC thỏa mãn $3MB = 2MC$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

(Trích đề thi thử lần 1, THPT Đồng Đậu, Vĩnh Phúc, năm 2015)

► **Hướng dẫn giải :**



* Vì B thuộc đường thẳng AB nên B(a; 1 – 2a).

Tương tự C(– 2 – 4b ; 3b).

Ta có: $\overrightarrow{MB}=(a-1;4-2a),\ \overrightarrow{MC}=(-3-4b;3b+3)$

* Ta có: $AB\cap AC=A\Rightarrow$ Tọa độ A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}2x+y-1=0\\3x+4y+6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}\Rightarrow\boxed{A(2;-3)}$$

Vì B, M, C thẳng hàng, 2MB = 2MC nên ta có: $3\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MC}$ *hay* $3\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MC}$

* TH1: $3\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\begin{cases}3(a-1)=2(-3-4b)\\3(4-2a)=2(3b+3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{11}{5}\\b=\dfrac{-6}{5}\end{cases}$

Suy ra $\boxed{B\left(\dfrac{11}{5};\dfrac{-17}{5}\right),C\left(\dfrac{14}{5};\dfrac{-18}{5}\right)\Rightarrow G\left(\dfrac{7}{3};\dfrac{-10}{3}\right)}$

* TH2: $3\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\begin{cases}3(a-1)=-2(-3-4b)\\3(4-2a)=-2(3b+3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=0\end{cases}$

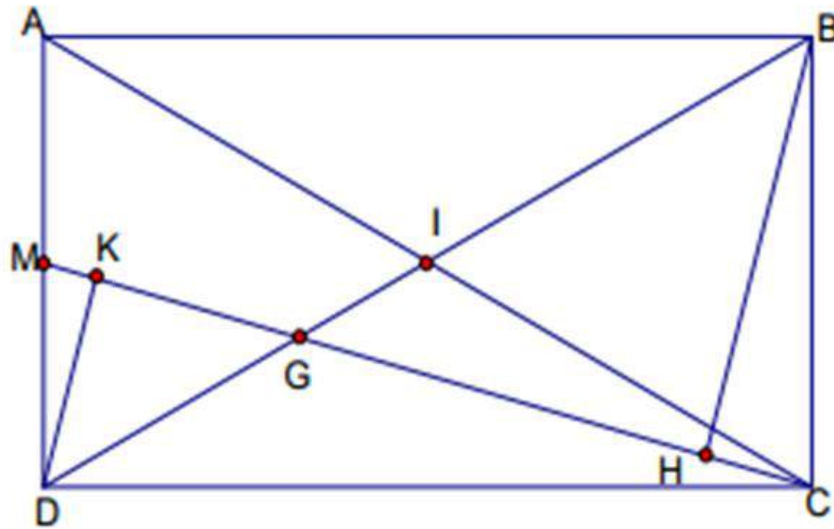
Suy ra $\boxed{B(3;-5),C(-2;0)\Rightarrow G\left(1;\dfrac{-8}{3}\right)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{G\left(\dfrac{7}{3};\dfrac{-10}{3}\right)\ hay\ G\left(1;\dfrac{-8}{3}\right)}$

Câu 85. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $D(4;5)$. Điểm M là trung điểm của đoạn AD, đường thẳng CM có phương trình $x-8y+10=0$. Điểm B nằm trên đường thẳng $2x+y+1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B và C biết rằng C có tung độ nhỏ hơn 2.

(*Trích đề thi thử lần 1, THPT Đào Duy Từ, Thanh Hóa, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B, C lên MC.

Ta có $DK = \dfrac{|4-8.5+10|}{\sqrt{1^2+(-8)^2}} = \dfrac{26}{\sqrt{65}}$

* Gọi I, G là giao điểm của BD với AC và MC

Suy ra G là trọng tâm tam giác ACD: $DG = 2GI \Rightarrow BG = 2DG \Rightarrow \dfrac{BH}{DK} = \dfrac{BG}{DG} = 2$

* $B(b;-2b-1) \Rightarrow BH = \dfrac{|17b+18|}{\sqrt{65}} = \dfrac{52}{\sqrt{65}} \Leftrightarrow |17b+18| = 52 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2\ (tm) \\ b = \dfrac{-70}{17}\ (ktm) \end{array}\right.$

Vì B và D cùng phía so với CM. Do đó ta có **B(2; -5) suy ra I(3; 0)**

* $C(8c-10;c) \Rightarrow \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB} = (14-8c)(12-8c) + (5-c)(-5-c) = 0$

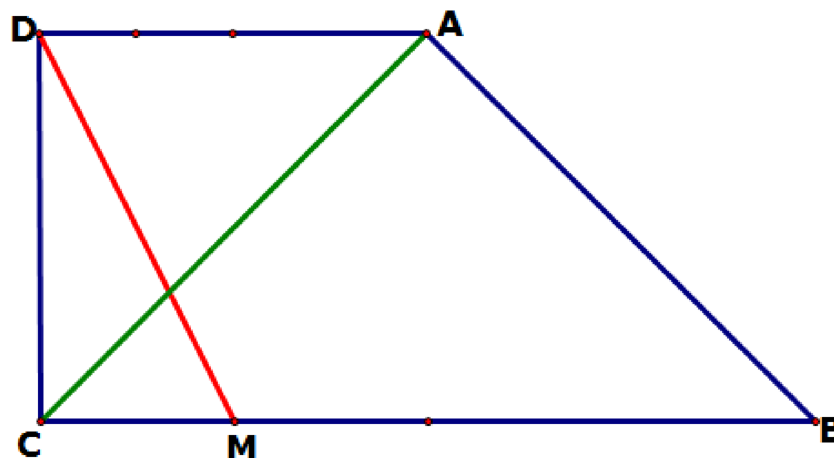
Suy ra $65c^2 - 208c + 143 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 1 \\ c = \dfrac{143}{65}\ (loai\ do\ c > 2) \end{array}\right. \Rightarrow C(-2;1) \Rightarrow A(8;-1)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(8;-1),\ B(2;-5),\ C(-2;1)}$

Câu 86. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại C và D có BC = 2AD = 2DC và tọa độ đỉnh C(3; –3) , đỉnh A nằm trên đường thẳng $d: 3x + y - 2 = 0$, phương trình đường thẳng DM có dạng là $x - y - 2 = 0$ với M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{CM}$. Xác định tọa độ các điểm A, D, B

(*Trích đề thi thử lần 1, THPT Hàn Thuyên, Bắc Ninh, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Vì A thuộc d suy ra A(a; 2 – 3a)

Ta có: $S_{ADM} = 2S_{DCM} \Rightarrow d(A;DM) = 2d(C;DM)$

* Do đó $\left[\begin{array}{l} a=-1 \Rightarrow A(3;-7) \\ a=3 \Rightarrow A(-1;5) \end{array}\right.$. Do A, C nằm khác phía với đường thẳng DM nên ta nhận **A(-1; 5).**

* Vì D thuộc DM suy ra D(d; d – 2).

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} AC \perp CD \\ AD = CD \end{cases}$ giải hệ trên ta được d = 5 suy ra **D(5; 3)**

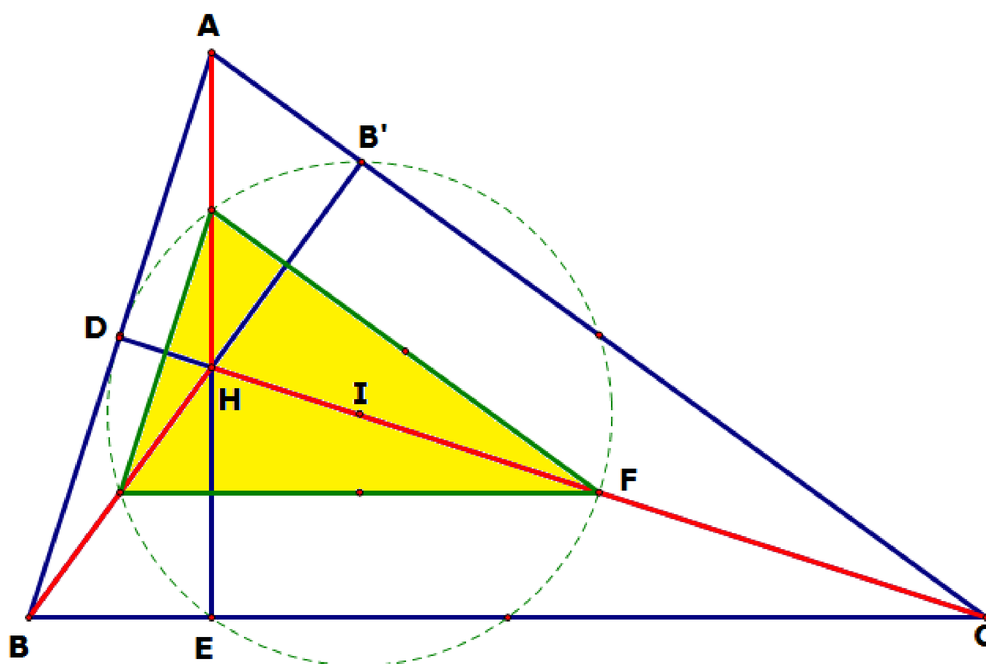
* Mặt khác $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD} \Rightarrow B(-9;1)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(1;-5),\ B(-9;1),\ D(5;3)}$

Câu 87. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình các đường thẳng AB, AC lần lượt là $4x-3y-20=0,\ 2x+y+10=0$. Đường tròn (C) đi qua trung điểm của các đoạn HA, HB, HC có phương trinh là $(x-1)^2+(y+2)^2=25$, trong đó H là trực tâm của tam giác ABC. Tìm tọa độ H biết C có hoành độ lớn hơn -4.

(*Trích đề thi thử Đại Học Thành Nhân, Đà Lạt, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4x-2y-20=0 \\ 2x+y+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-8 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-1;-8)}$

* Gọi D, E, F, N lần lượt là trung điểm của HA, HB, HC, AC và B' là chân đường cao hạ từ B của tam giác ABC.

Ta có: $\begin{cases} EF // BC \\ NF // AH \Rightarrow EF \perp NF \\ BC \perp AH \end{cases}$. Tương tự ta có: $ED \perp DN$

Vậy đường tròn (C) đi qua D, E, F là đường tròn đường kính EN.

Suy ra N thuộc (C). Mặt khác $EB' \perp B'N \Rightarrow B' \in (C)$

* Tọa độ của N và B' là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x+y+10=0 \\ (x-1)^2+(y+2)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2;\ y=-6 \\ x=-4;\ y=-2 \end{array}\right.$

Nếu N(-4; -2) thì C(-7;4) (loại)

Nếu N(-2; -6) thì C(-3; -4). Vậy **N(-2;-6), B'(-4;-2), C(-3;-4)**

* Đường thẳng BH đi qua B' và nhận vecto chỉ phương (1; -2) của AC là pháp tuyến nên có phương trình là x – 2y = 0.

Đường thẳng HC đi qua C và nhận vecto chỉ phương (3; 4) của AB làm vecto pháp tuyến nên có phương trình 3x + 4y + 25 = 0.

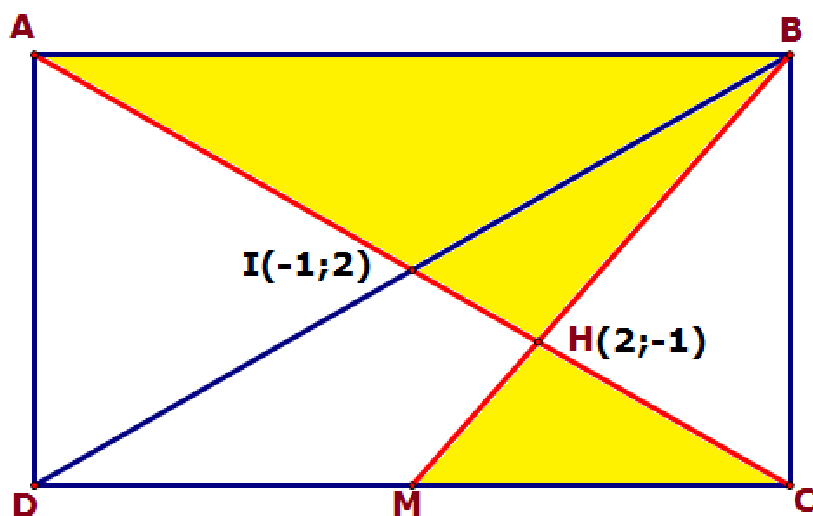
Khi đó tọa độ H là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-2y=0 \\ 3x+4y+25=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=\dfrac{-5}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{H\left(-5;\dfrac{-5}{2}\right)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{H\left(-5;\dfrac{-5}{2}\right)}$

Câu 88. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $AB = AD\sqrt{2}$, tâm $I(-1;2)$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD, $H(2;-1)$ là giao điểm của hai đường thẳng AC và BM. Tìm tọa độ các điểm A, B.

(*Trích đề thi thử khối B, THPT Chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ, năm 2014*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Từ giả thiết ta có H là trọng tâm tam giác BCD. Suy ra $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{HI} \Rightarrow A(-2;-5)$

* Ta có $HB = \dfrac{2}{3}BM = \dfrac{BC\sqrt{6}}{3}$; $HC = \dfrac{AC}{3} = \dfrac{BC\sqrt{3}}{3}$

Suy ra $HB^2 + HC^2 = BC^2 \Rightarrow BM \perp AC$

* Suy ra BM đi qua H(2; -1) nhận vecto pháp tuyến $\overrightarrow{IH} = (1;1)$ suy ra BM: x + y – 1 = 0

Vậy tọa độ B có dạng B(b; 1 – b)

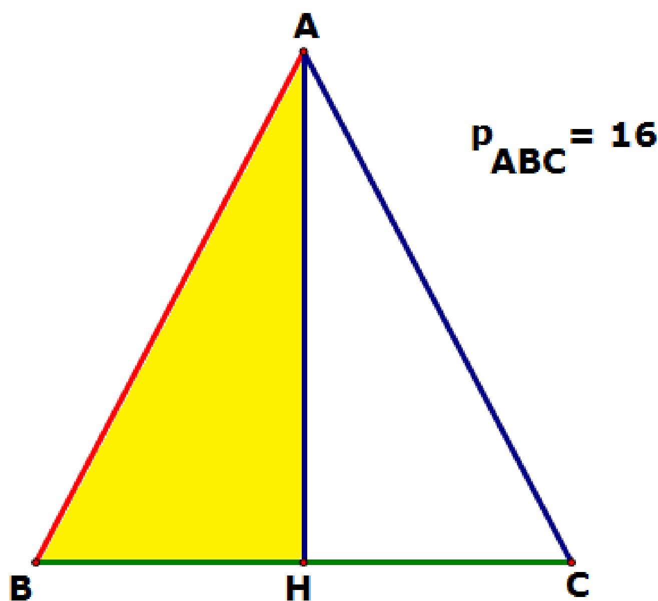
* Ta có: $IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (b-1)^2 + (3-b)^2 = 18 \Leftrightarrow b^2 - 4b - 4 = 0 \Leftrightarrow b = 2 \pm 2\sqrt{2}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B(2+2\sqrt{2};-1-2\sqrt{2})\ hay\ B(2-2\sqrt{2};-1+2\sqrt{2})}$

Câu 89. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có chu vi bằng 16. Hai đỉnh A, B thuộc đường thẳng d có phương trình: $2\sqrt{2}x - y - 2\sqrt{2} = 0$ và B, C thuộc trục hoành. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

(*Trích đề thi thử lần 5, THPT Chuyên Nguyễn Tất Thành, Kon Tum, năm 2014*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Theo giả thiết B là giao điểm của d và trục Ox nên ta có **B(1; 0).**

Điểm A thuộc đường thẳng d nên tọa độ điểm A có dạng $A(a;2\sqrt{2}(a-1))$.

* Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên Ox suy ra tọa độ **H(a; 0).**

Vì tam giác ABC cân tại A nên H là trung điểm BC suy ra **C(2a – 1; 0)**

* Ta có: $\begin{cases} BH = |1-a| \\ AB = \sqrt{(a-1)^2 + 8(a-1)^2} = 3|a-1| \end{cases}$.

Lại có, chu vi của tam giác ABC là 2p = 2AB + 2BH = 8|a – 1|

Theo giả thiết ta có 16 = 8|t – 1| $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = -1 \end{array}\right.$

* Với a = 3, ta có: $A(3;4\sqrt{2}), C(5;0)$

Với a = –1, ta có: $A(-1;-4\sqrt{2}), C(-3;0)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(3;4\sqrt{2}),\ B(1;0),\ C(5;0) \text{ hay } A(-1;-4\sqrt{2}),\ B(1;0),\ C(-3;0)}$

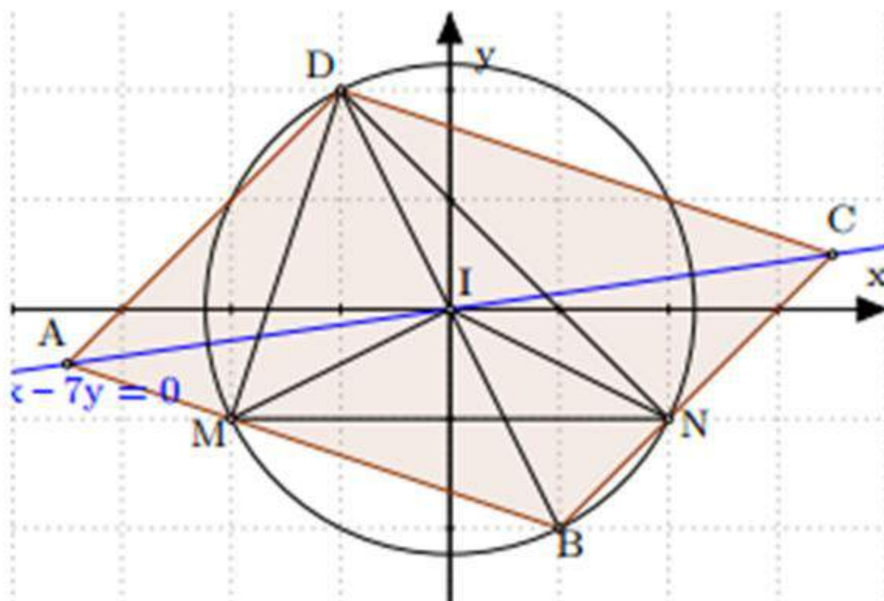
Câu 90. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có $BD = \frac{\sqrt{10}}{5}AC$. Gọi hình chiếu vuông góc của điểm D lên các đường thẳng AB, BC lần lượt là $M(-2;-1)$, $N(2;-1)$. Biết AC nằm trên đường thẳng có phương trình $x - 7y = 0$. Tìm tọa độ các điểm A, C.

(*Trích đề thi thử số 4, Website: toancapba.net , năm 2014*)

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi I là trung điểm BD suy ra $IM = IN = \frac{BD}{2}$ suy ra I là giao điểm của AC và trung trực đoạn MN.

Mà trung trực đoạn MN là trục Oy nên I(0; 0)



* Trong tam giác vuông BMD có $IM = \dfrac{BD}{2} \Rightarrow 2\sqrt{5} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}AC \Rightarrow IA = IC = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$

* Tọa độ A, C là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x - 7y = 0 \\ x^2 + y^2 = \dfrac{25}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-7}{2}; y = \dfrac{-1}{2} \\ x = \dfrac{7}{2}; y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ nên $A\left(\dfrac{-7}{2};\dfrac{-1}{2}\right)$, $C\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A\left(\dfrac{-7}{2};\dfrac{-1}{2}\right), C\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{1}{2}\right)}$

Câu 91. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A nằm trên trục hoành với $0 < x_A < \dfrac{5}{2}$. Các đường cao xuất phát từ đỉnh B và C lần lượt có phương trình là: $d_1 : x - y + 1 = 0,\ d_2 : 2x + y - 4 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất

(*Trích đề thi thử lần 6 , Website: ViettelStudy.vn, năm 2015*)

► Hướng dẫn giải :

* Do $B \in d_1 \Rightarrow B(t;1+t),\ do\, C \in d_2 \Rightarrow C(t_1; 4 - 2t_1)$

Do $A \in Ox \Rightarrow A(a;0),\ \overrightarrow{u_1} = (1;1), \overrightarrow{u_2} = (1;-2)$. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (t - a; 1 + t),\ \overrightarrow{AC} = (t_1 - a; 4 - 2t_1)$

* Lại có $d_1 \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow t_1 = 4 - a$

$d_2 \perp AB \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow t = -2 - a$. Ta tìm $B(-a-2; -a-1),\ C(4-a; 2a-4),\ \overrightarrow{AC} = (4 - 2a; 2a - 4)$

* Ta có phương trình: $AC : x + y - a = 0$

Ta có: $AC = |4 - 2a|\sqrt{2},\ d(B;AC) = \dfrac{|3a+3|}{\sqrt{2}} \Rightarrow S_{ABC} = 3|(a-2)(a-1)|$

* Xét hàm S_{ABC} biến a trên khoảng $\left(0;\dfrac{5}{2}\right)$ ta được kết quả $\underset{a \in \left(0;\frac{5}{2}\right)}{Max}\, S_{ABC} = \dfrac{27}{4}$ đạt được khi

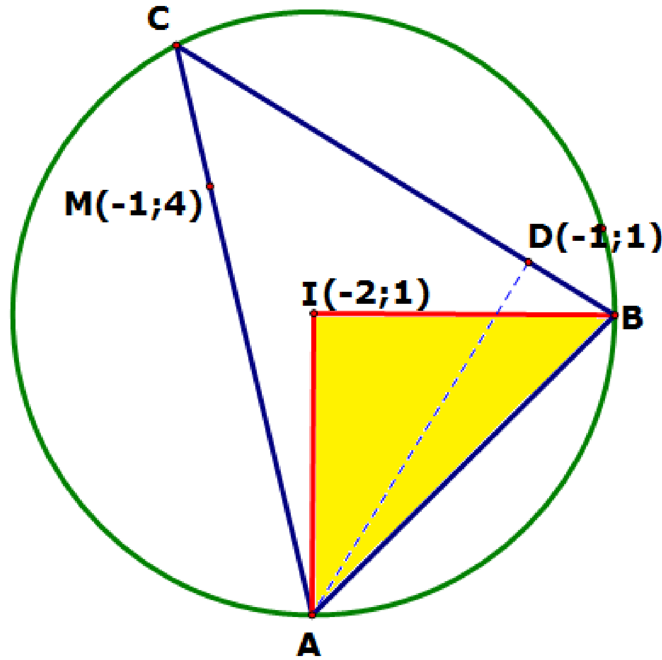
$a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow A\left(\dfrac{1}{2};0\right), B\left(\dfrac{-5}{2};\dfrac{-3}{2}\right), C\left(\dfrac{7}{2};-3\right)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A\left(\dfrac{1}{2};0\right), B\left(\dfrac{-5}{2};\dfrac{-3}{2}\right), C\left(\dfrac{7}{2};-3\right)}$

Câu 92. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I(-2;1)$ và thỏa mãn điều kiện $\widehat{AIB} = 90^\circ$. Chân đường cao kẻ từ A đến BC là $D(-1;-1)$. Đường thẳng AC qua $M(-1;4)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B biết đỉnh A có hoành độ dương.

(*Trích đề thi thử THPT Thủ Đức, Tp Hồ Chí Minh, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Ta có: $\widehat{AIB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BCA} = 45^\circ$ hay $\widehat{BCA} = 135^\circ$

Suy ra $\widehat{CAD} = 45^\circ \Rightarrow \Delta ADC$ cân tại D.

Ta có $DI \perp AC$ Khi đó phương trình đường thẳng AC có dạng: $x - 2y + 9 = 0$.

* Ta có: $A(2a-9;a), \overrightarrow{AD} = (8-2a;-1-a)$

$$AD^2 = 40 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 5 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{A(1;5)}\text{(tm)}$$

* Phương trình BD : $x + 3y + 4 = 0$ và phương trình BI: $3x + 4y + 5 = 0$

* $B = BI \cap BD \Rightarrow \begin{cases} x + 3y + 4 = 0 \\ 3x + 4y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(2;-2)}$.

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(1;5),\ B(2;-2)}$

Câu 93. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2BC. Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng BD. E,F lần lượt là trung điểm đoạn CD và BH. Biết A(1;1), phương trình đường thẳng EF là 3x – y – 10 = 0 và điểm E có tung độ âm. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D.

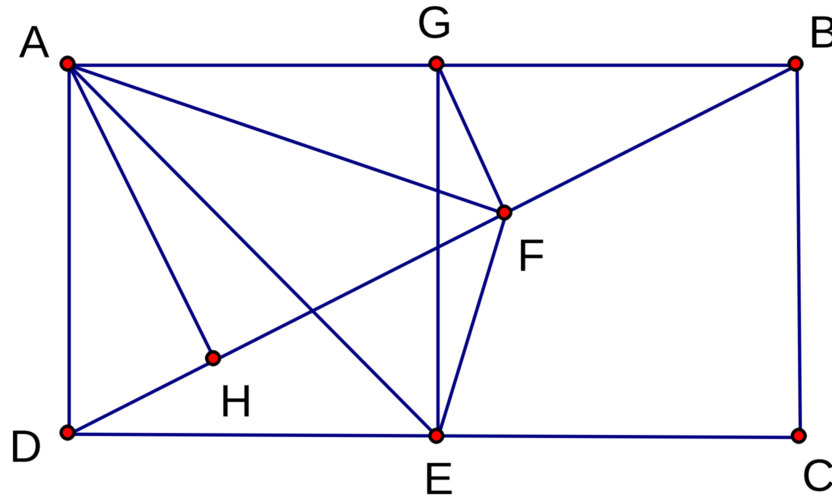
(*Trích đề thi thử lần 3, THPT Quỳnh Lưu 1, Nghệ An, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi E,F,G lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng CD, BH AB. Ta chứng minh $AF \perp EF$.

Ta thấy các tứ giác ADEG và ADFG nội tiếp nên tứ giác ADEF cũng nội tiếp, do đó $AF \perp EF$.
Đường thẳng AF có phương trình: **AF: x + 3y – 4 = 0.**

Tọa độ điểm F là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 3x - y = 10 \\ x + 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{17}{5} \\ y = \dfrac{1}{5} \end{cases} \rightarrow \boxed{F\left(\dfrac{17}{5}; \dfrac{1}{5}\right)} \rightarrow AF = \sqrt{\dfrac{32}{5}}$



* $\Delta AFE \sim \Delta DCB \Rightarrow EF = \dfrac{1}{2}AF = 2\sqrt{\dfrac{2}{5}}$.

Mặt khác: $E(t; 3t-10) \rightarrow EF^2 = \dfrac{8}{5} \Leftrightarrow \left(t - \dfrac{17}{5}\right)^2 + \left(3t - \dfrac{51}{5}\right)^2 = \dfrac{8}{5}$

Suy ra $\Leftrightarrow 5t^2 - 34t + 57 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \dfrac{19}{5} \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} E(3;-1) \\ E\left(\dfrac{19}{5}; \dfrac{7}{5}\right) \end{array}\right.$

* Theo giả thiết ta được $E(3;-1)$, phương trình AE: x + y – 2 = 0.

Gọi D(x;y), tam giác ADE vuông cân tại D nên

$\begin{cases} AD = DE \\ AD \perp DE \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y+1)^2 \\ (x-1)(x-3) = (y-1)(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; y = -1 \\ x = 3; y = 1 \end{array}\right.$ hay D(1;-1) $\vee$ D(3;1)

* Vì D và F nằm về hai phía so với đường thẳng AE nên D(1;-1).

Khi đó: C(5;-1); B(1;5).

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B(1;5),\ C(5;-1),\ D(1;-1)}$

Câu 94. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông *ABCD*. Điểm $F\left(\dfrac{11}{2}; 3\right)$ là trung điểm của cạnh *AD*. Đường thẳng *EK* có phương trình $19x - 8y - 18 = 0$ với *E* là trung điểm của cạnh *AB*, điểm *K* thuộc cạnh *DC* và *KD = 3KC*. Tìm tọa độ điểm *C* của hình vuông *ABCD* biết điểm E có hoành độ nhỏ hơn 3.

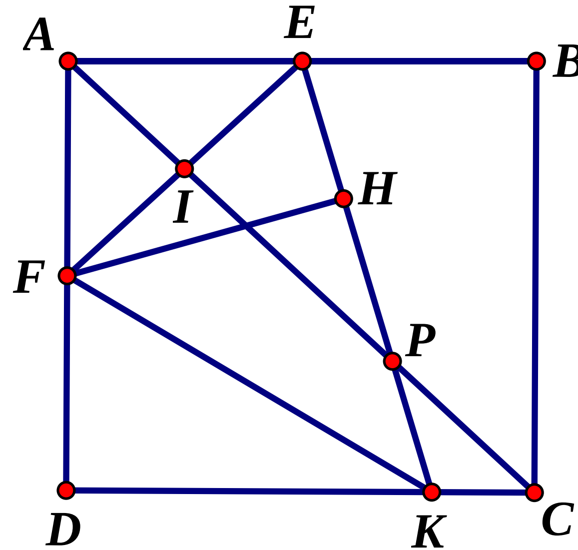
(*Trích đề thi thử THPT Lương Ngọc Quyến, Thái Nguyên, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi AB = a (a > 0) $\Rightarrow S_{\Delta EFK} = S_{ABCD} - S_{\Delta AEF} - S_{\Delta FDK} - S_{\Delta KCBE} = \dfrac{5a^2}{16} \Rightarrow \boxed{S_{\Delta EFK} = \dfrac{5a^2}{16}}$

$S_{\Delta EFK} = \dfrac{1}{2}FH.EK$, $FH = d(F, EK) = \dfrac{25}{2\sqrt{17}}; EK = \dfrac{a\sqrt{17}}{4} \Rightarrow a = 5$

ABCD là hình vuông cạnh bằng $5 \Rightarrow \text{EF} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$



* Tọa độ E là nghiệm: $\begin{cases} \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{25}{2} \\ 19x - 8y - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{58}{17} \text{(loai)} \end{array}\right. \\ y = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{E\left(2; \frac{5}{2}\right)}$

* AC qua trung điểm I của EF và AC $\perp$ EF $\Rightarrow$ AC: $\boxed{7x + y - 29 = 0}$

Có : $AC \cap EK = \{P\} \Rightarrow \begin{cases} 7x + y - 29 = 0 \\ 19 - 8y - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = \frac{17}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{P\left(\frac{10}{3}; \frac{17}{3}\right)}$

* Ta xác định được: $\overrightarrow{IC} = \frac{9}{5}\overrightarrow{IP} \Rightarrow \boxed{C(3;8)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{C(3;8)}$

Câu 95. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác nhọn *ABC*. Đường thẳng chứa đường trung tuyến kẻ từ đỉnh *A* và đường thẳng *BC* lần lượt có phương trình là $3x + 5y - 8 = 0$, $x - y - 4 = 0$. Đường thẳng qua *A* vuông góc với đường thẳng *BC* cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* tại điểm thứ hai là $D(4;-2)$. Viết phương trình các đường thẳng *AB*, *AC*; biết rằng hoành độ của điểm *B* không lớn hơn 3.

(***Trích đề thi thử THPT Trần Phú, Thanh Hóa, năm 2015***)

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi *M* là trung điểm của *BC*, *H* là trực tâm tam giác *ABC*, *K* là giao điểm của *BC* và *AD*, *E* là giao điểm của *BH* và *AC*.

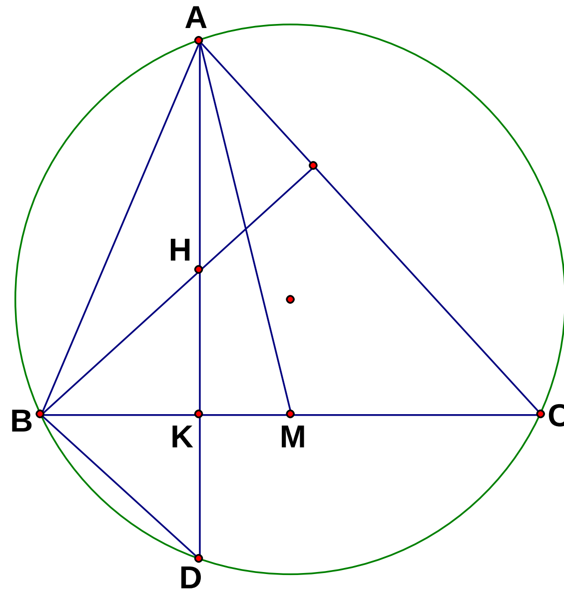
Ta kí hiệu $\overrightarrow{n_d}, \overrightarrow{u_d}$ lần lượt là vtpt, vtcp của đường thẳng *d*.

Do *M* là giao điểm của *AM* và *BC* nên tọa độ của *M* là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ 3x + 5y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{M\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)}$$

* AD vuông góc với BC nên $\overrightarrow{n_{AD}} = \overrightarrow{u_{BC}} = (1;1)$, mà AD đi qua điểm D suy ra phương trình

$$1(x-4)+1(y+2)=0 \Leftrightarrow \boxed{AD: x+y-2=0}.$$



Do A là giao điểm của AD và AM nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x+5y-8=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(1;1)}$$

Tọa độ điểm K là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x-y-4=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{K(3;-1)}$

* Tứ giác $HKCE$ nội tiếp nên $BHK = KCE$, mà $KCE = BDA$ (nội tiếp chắn cung AB)

Suy ra $BHK = BDK$, vậy K là trung điểm của HD nên $H(2;4)$.

* Do B thuộc $BC \Rightarrow B(t;t-4)$, kết hợp với M là trung điểm BC suy ra $C(7-t;3-t)$.

$\overrightarrow{HB}(t-2;t-8); \overrightarrow{AC}(6-t;2-t)$. Do H là trực tâm của tam giác ABC nên

$$\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow (t-2)(6-t)+(t-8)(2-t)=0 \Leftrightarrow (t-2)(14-2t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=7 \end{array}\right.$$

* Do $t \le 3 \Rightarrow t=2 \Rightarrow B(2;-2), C(5;1)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-3)$, $\overrightarrow{AC}=(4;0) \Rightarrow \overrightarrow{n_{AB}}=(3;1), \overrightarrow{n_{AC}}=(0;1)$

Suy ra $AB: 3x+y-4=0;\ AC: y-1=0.$

Vậy phương trình thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{AB: 3x+y-4=0;\ AC: y-1=0.}$

Câu 96. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;4)$, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt BC tại D, đường phân giác trong của ADB có phương trình $x-y+2=0$, điểm $M(-4;1)$ thuộc cạnh AC. Viết phương trình đường thẳng AB.

(*Trích đề thi thử THPT Thanh Chương III, Nghệ An, năm 2015*)

► Hướng dẫn giải :

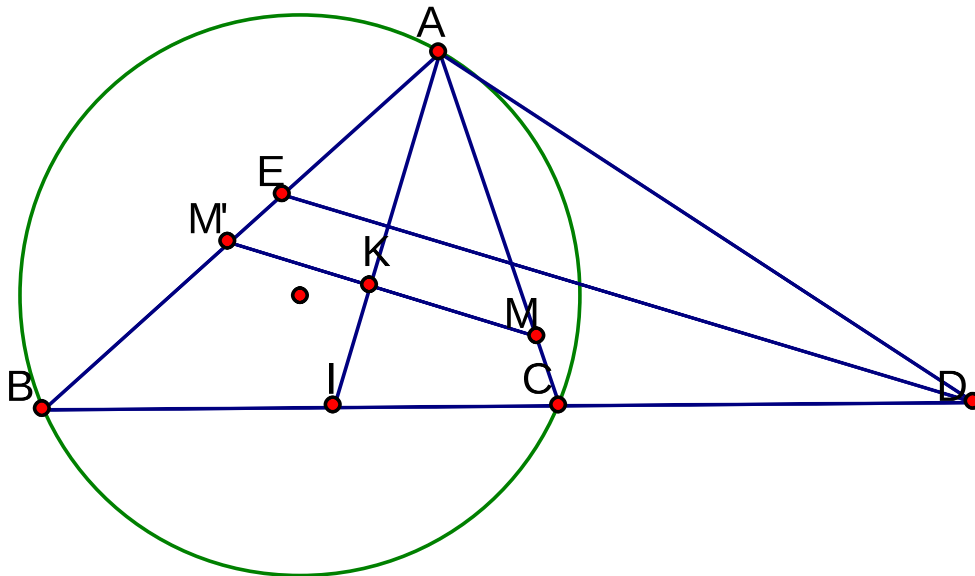
* Gọi AI là phân giác trong của BAC

Ta có : $AID = ABC + BAI$

$IAD = CAD + CAI$

Mà $BAI = CAI$, $ABC = CAD$ nên $AID = IAD$

$\Rightarrow$ ΔDAI cân tại D $\Rightarrow DE \perp AI$



* Phương trình đường thẳng AI là : $x+y-5=0$

* Gọi M' là điểm đối xứng của M qua AI $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng MM' : $x-y+5=0$

Gọi $K = AI \cap MM' \Rightarrow$ K(0;5) $\Rightarrow$ M'(4;9)

* Veco chỉ phương của đường thẳng AB là $\overrightarrow{AM'}=(3;5)$

$\Rightarrow$ Vecto pháp tuyến của đường thẳng AB là $\vec{n}=(5;-3)$

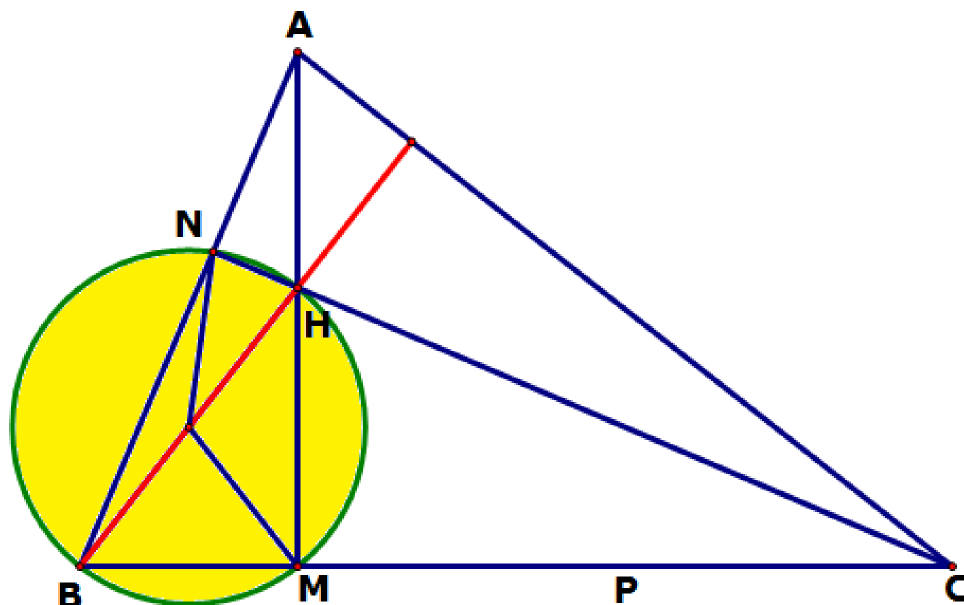
Vậy phương trình đường thẳng AB là: $5(x-1)-3(y-4)=0 \Leftrightarrow 5x-3y+7=0$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{5x-3y+7=0}$

Câu 97. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nhọn có đỉnh $A(-1;4)$, trực tâm H. Đường thẳng AH cắt cạnh BC tại M, đường thẳng CH cắt cạnh AB tại N. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN là $I(2;0)$, đường thẳng BC đi qua điểm $P(1;-2)$. Tìm toạ độ các đỉnh B, C của tam giác biết đỉnh B thuộc đường thẳng $d: x+2y-2=0$.

(*Trích đề thi thử lần 2, THPT Minh Châu, Hưng Yên, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Ta thấy tứ giác BMHN nội tiếp suy ra I là trung điểm của BH;

Ta có: $B \in d \Rightarrow B(2-2t;t)$

* Suy ra $H(2+2t;-t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (3+2t;-t-4), \overrightarrow{BP} = (2t-1;-t-2)$

Do H là trực tâm của tam giác ABC

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BP} = 0 \Leftrightarrow (2t+3)(2t-1)+(t+4)(t+2) = 0 \Leftrightarrow 5t^2+10t+5 = 0 \Leftrightarrow t = -1$

* Suy ra $H(0;1), B(4;-1), \overrightarrow{AH} = (1;-3)$,đường thẳng $BC: x-3y-7=0$

* Đường thẳng $AC: 2x-y+6=0$. Tìm được toạ độ $C(-5;-4)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B(4;-1),\ C(-5;-4)}$

Câu 98. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác đều ABC có $A(4;-1)$, điểm $M\left(4-\frac{4\sqrt{3}}{3};3\right)$ thuộc cung BC không chứa điểm A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, biết $MC = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ và tọa độ điểm B là các số nguyên. Tìm tọa độ các đỉnh B, C của tam giác ABC.

(*Trích đề thi thử lần 2, THPT Hồng Quang, Hải Dương, năm 2015*)

▶ **Hướng dẫn giải :**

* Chứng minh MA = MB + MC:

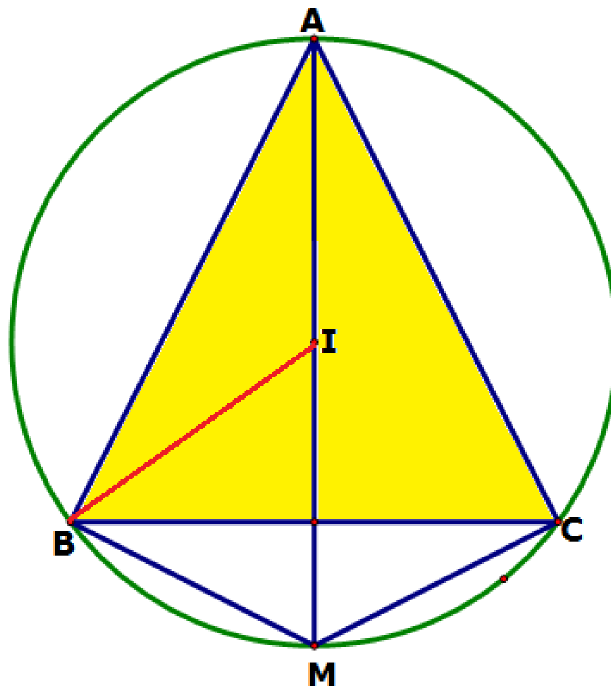
Trên đoạn AM lấy điểm I sao cho **MB = MI (1).**

Vì $\angle BCA = \angle BMA = 60^0$ nên tam giác MBI đều suy ra MB = BI

Mặt khác, $\angle ABI + \angle IBC = \angle MBC + \angle IBC = 60^0 \Rightarrow \boxed{\angle ABI = \angle MBC}$

Lại có, BA = BC suy $\Delta BIA = \Delta BMC$ $(c-g-c)$ suy ra **MC = AI (2).**

Từ (1), (2) suy ra MB + MC = MI + AI = MA.



* Từ $MA = \frac{8\sqrt{3}}{3} \Rightarrow MA = 2MC = MB + MC \Rightarrow MB = MC$, lại có AB = AC

Suy ra MA là đường trung trực của đoạn thẳng BC nên MA là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Hai cạnh AB và AC nằm trên các đường thẳng qua A và tạo với AM một góc 30 độ.

Phương trình AB, AC có dạng: $a(x-4)+b(y+1)=0\ (a^2+b^2>0)$

Với $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{-4\sqrt{3}}{3};4\right)\Rightarrow \overrightarrow{n_{AM}}=\left(1;\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ là vecto pháp tuyến của đường thẳng AM.

* Gọi α là góc tạo bởi AB, AC với AM ta có $\alpha=30^0$

Nên $\cos\alpha=\frac{\left|a.1+b.\frac{\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{1+\frac{1}{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow b^2-\sqrt{3}ab=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0,a=1\\b=\sqrt{3},a=1\end{array}\right.$

Suy ra $\Rightarrow\Delta:x-4=0$ *hay* $\Delta':x+\sqrt{3}y-4+\sqrt{3}=0$

* Vì AM là một đường kinh nên góc $\angle MBA=\angle MCA=90^0$, phươn trình các đường thẳng MB, MC qua M và vuông góc với Δ,Δ' lần lượt là $y-3=0,\ \sqrt{3}x-y+7-4\sqrt{3}=0$

Tọa độ B, C là nghiệm của các hệ phương trình:

$$\begin{cases}x-4=0\\y-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}\Rightarrow\boxed{B(4;3)}$$

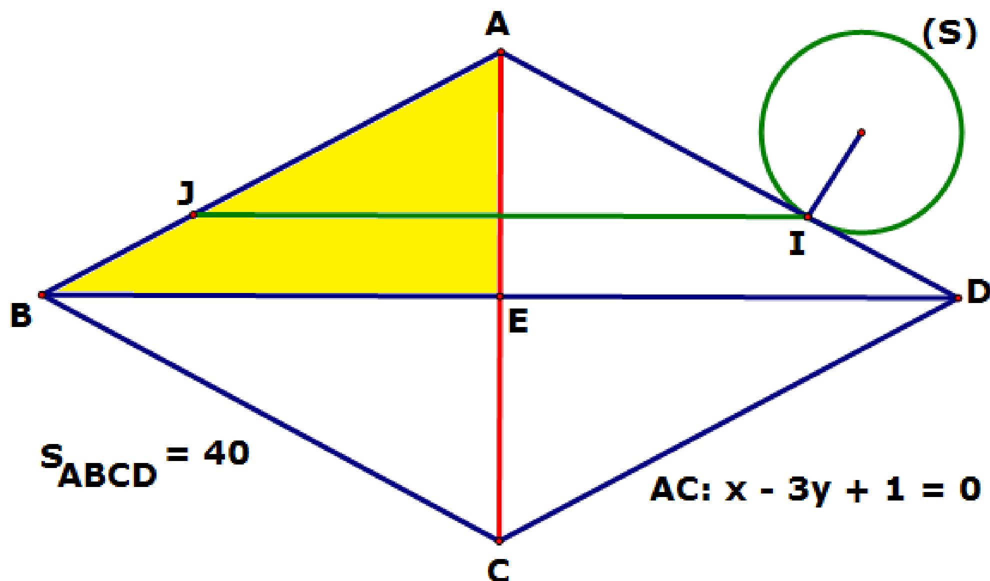
$$\begin{cases}x+\sqrt{3}y-4+\sqrt{3}=0\\\sqrt{3}x-y+7-4\sqrt{3}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4-2\sqrt{3}\\y=1\end{cases}\Rightarrow\boxed{C(4-2\sqrt{3};1)}$$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B(4;3),\ C(4-2\sqrt{3};1)}$

Câu 99. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có diện tích bằng 40, đường thẳng AD tiếp xúc với đường tròn $(S):(x-4)^2+(y-1)^2=2$, điểm $J\left(\frac{19}{5};\frac{18}{5}\right)$ nằm trên đường thẳng AB, đường thẳng AC có phương trình $x-3y+1=0$. Tìm tọa độ các điểm A, D biết D có hoành độ nhỏ hơn 5.

(*Trích đề thi thử THPT Lam Sơn, Thanh Hóa, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi I là điểm đối xứng với J qua đường thẳng AC, I thuộc AD.

Giả sử I(a; b) thì trung điểm của IJ là $H\left(\frac{a+\frac{19}{5}}{2};\frac{b+\frac{18}{5}}{5}\right)$

I, J đối xứng với nhau qua AC $\Leftrightarrow \begin{cases} H \in AC \\ \overrightarrow{JI}.\overrightarrow{u_{AC}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I(5;0)}$

* Ta có I thuộc (S) nên đường thẳng AD chính là tiếp tuyến của (S) tại I.

Phương trình AD: $x - y - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{A(8;3)}$

* Gọi E là tâm của hình thoi và $\varphi = \angle EAD \Rightarrow \varphi$ là góc giữa AC và AD

Suy ra

$\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cot\varphi = 2 \Rightarrow S_{ABCD} = 40 \Leftrightarrow DE.EA = 20 \Leftrightarrow DE.DE\cot\varphi = 20 \Leftrightarrow DE^2 = 10$

* Giả sử $D(d; d-5)$ Ta có: $DE^2 = 10 \Leftrightarrow \left(d(D;AC)\right)^2 = 10 \Leftrightarrow \left(\frac{|d - 3(d-5) + 1|}{\sqrt{10}}\right)^2 = 10$

Suy ra d = 3 < 5 (nhận) hay d = 13 > 5 (loại). Vậy **D(3; -2)**

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(8;3),\ D(3;-2)}$

Câu 100. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD, điểm $M(5;-7)$ nằm trên cạnh BC. Đường tròn đường kinh AM cắt BC tại B, cắt BD tại $N(6;2)$, đỉnh C thuộc đường thẳng $d: 2x - y - 7 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD, biết hoành độ đỉnh C nguyên và hoành độ đỉnh A bé hơn 2.

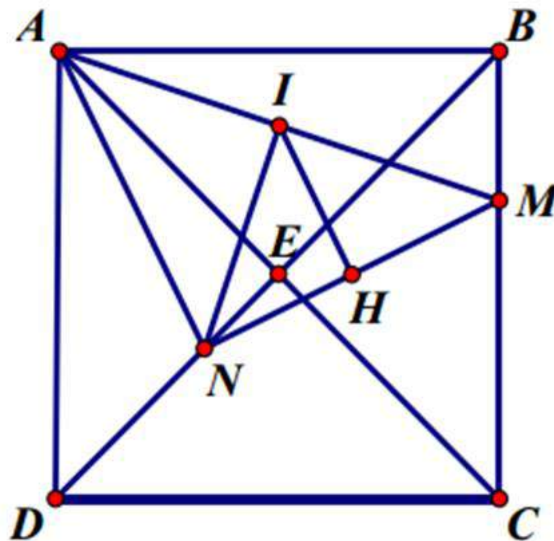
(*Trích đề thi thử lần 2, THPT Thuận Thành, Bắc Ninh, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi I là tâm đường tròn đường kinh AM thì I là trung điểm AM.

Dễ thấy $\angle MIN = sd\,MN = 2\angle MBN = 90^o$

Điểm C thuộc đường thẳng d suy ra C(c; 2c – 7).



* Gọi H là trung điểm của MN suy ra $\boxed{H\left(\frac{11}{2};\frac{9}{2}\right)}$

Phương trình đường thẳng trung trực của MN đi qua H và vuông góc với MN là:

$\Delta: x - 5y + 17 = 0,\ I \in \Delta \Rightarrow I(5a - 17; a)$

* Ta có: $\begin{cases} MN = \sqrt{26} \\ IM = \sqrt{29 - 6a^2} \end{cases}$. Tam giác MIN vuông cân tại I

Nên $IM = \sqrt{13} \Rightarrow 26a^2 - 234a + 520 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5 \Rightarrow I(8;5) \Rightarrow A(11;9)\ (ktm) \\ a = 4 \Rightarrow I(3;4) \Rightarrow A(1;1)\ (tm) \end{array}\right.$

* Gọi E là tâm hình vuông nên $E\left(\frac{c+1}{2};c-3\right) \Rightarrow \overrightarrow{EN} = \left(\frac{11-c}{2};5-c\right)$

Vì AC vuông góc BD nên

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{EN} = 0 \Leftrightarrow (c-1)\frac{11-c}{2} + (2c-8)(5-c) = 0 \Leftrightarrow 5c^2 - 48c + 91 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 7 \\ c = \frac{13}{5} \end{array}\right.$$

Suy ra C(7; 7) suy ra E(4;4)

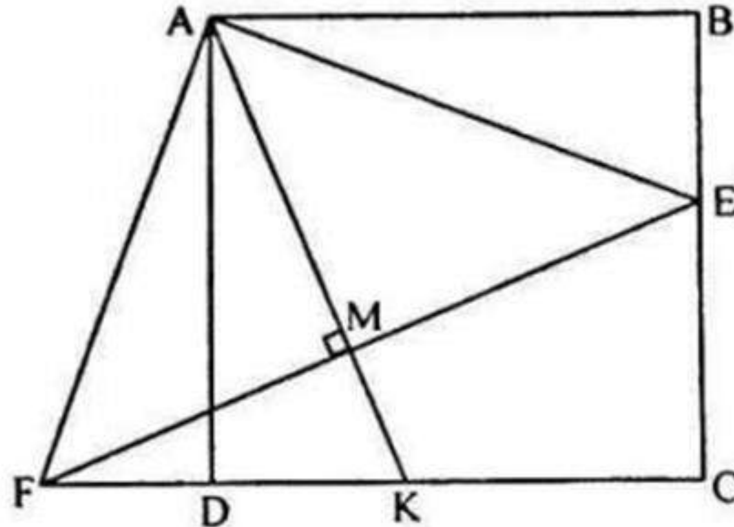
Phương trình BD: x + y – 8 = 0 và BC: x – 7 = 0 suy ra B(7; 1) suy ra D(1; 7).

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(1;1),\ B(7;1),\ C(7;7),\ D(1;7)}$

Câu 101. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD và điểm E thuộc cạnh BC. Một đường thẳng qua A vuông góc với AE cắt CD tại F. Đường thẳng chứa đường trung tuyến AM của tam giác AEF cắt CD tại K. Tìm tọa độ điểm D biết $A(-6;6)$, $M(-4;2)$, $K(-3;0)$.

(Trích đề thi thử lần 3, THPT Chuyên Đại Học Sư Phạm, Hà Nội, năm 2015)

► **Hướng dẫn giải :**



* Ta có hai tam giác vuông ABE bằng ADF vì AB = AD và góc BAE = góc DAF (cùng phụ với góc DAE). Suy ra tam giác AEF vuông cân và mE = MA = MF suy ra AM vuông góc EF.

Mặt khác EF đi qua M có phương trình: 2(x + 4) – 4(y – 2) = 0 nên **EF: x – 2y + 8 = 0**

* Bây giờ ta tìm tọa độ các điểm E, F thỏa mãn ME = MA = MF

Gọi T(x; y) thuộc đường thẳng EF suy ra T(2t – 8; t)

Khi đó MT = MA $\Leftrightarrow (2t-4)^2 + (t-2)^2 = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 4 \end{array}\right.$

Như vậy có hai điểm T thỏa yêu cầu bài toán. (đó cũng chính là hai điểm E và F).

* **TH1**: E(-8; 0), F(0; 4)

Do F thuộc đường thẳng CD, nên CD có dạng tham số: $\begin{cases} x = 3t \\ y = 4 + 4t \end{cases} (t \in R) \Rightarrow D(3t;4+4t)$

Ta có: $AD \perp KF \Leftrightarrow \overrightarrow{KF}.\overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow 3(3t+6) + 4(-2+4t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-2}{5} \Rightarrow \boxed{D\left(\frac{-6}{5};\frac{12}{5}\right)}$

* **TH2**: F(-8; 0), E(0; 4)

Do F thuộc đường thẳng CD, nên CD có dạng tham số: $\begin{cases} x = -8 + 5t \\ y = 0 \end{cases} (t \in R) \Rightarrow D(-8+5t;0)$

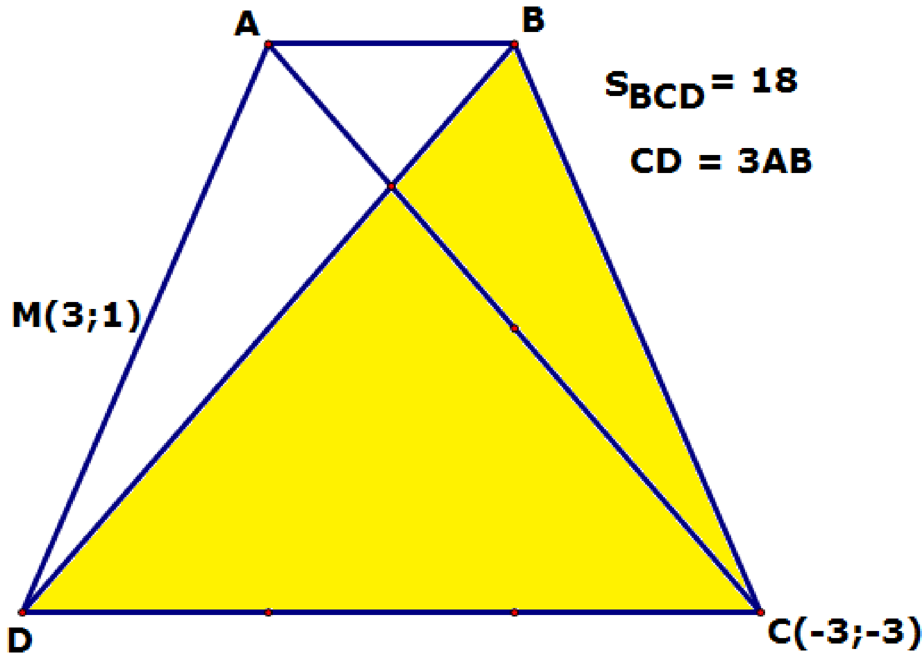
Ta có: $AD \perp KF \Leftrightarrow \overrightarrow{KF}.\overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow 5(-2+5t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5} \Rightarrow \boxed{D(-6;0)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{D\left(\frac{-6}{5};\frac{12}{5}\right) \text{ hay } D(-6;0)}$

Câu 102. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD có đáy lớn CD và AB (CD = 3AB = $3\sqrt{10}$), tọa độ $C(-3;-3)$, trung điểm của AD là $M(3;1)$. Tìm tọa độ đỉnh B biết diện tích tam giác BCD bằng 18 và D có hoành độ nguyên dương.

(*Trích đề thi thử lần 1, THPT Chuyên Lê Hồng Phong, Tp Hồ Chí Minh, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi $\vec{n} = (a;b)$ là vecto pháp tuyến của CD $(a^2 + b^2 > 0)$

Suy ra CD: a(x + 3) + b(y + 3) = 0

* Ta có: $S_{BCD} = S_{ACD} = 18 \Rightarrow d(A;CD) = \frac{2S_{ACD}}{CD} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$

Suy ra $d(M;CD) = \frac{3\sqrt{10}}{5} \Leftrightarrow 5|6a+4b| = 3\sqrt{10}\sqrt{a^2+b^2}$

* Suy ra $81a^2 + 120ab + 31b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -3a \\ 27a = -31b \end{array}\right.$

* Với b = - 3a, chọn a = 1 suy ra b = -3.

Khi đó (CD): x – 3y – 6 = 0 suy ra D(3d + 6; d)

Ta có: $CD^2 = 90 \Leftrightarrow (3d+9)^2 + (d+3)^2 = 90 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = 0 \\ d = -6 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} D(6;0)\ (tm) \\ D(-12;-6)\ (ktm) \end{array}\right.$

Vậy D(6; 0) suy ra A(0; 2). Ta có: $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} \Rightarrow B(-3;1)$

* Với 31b = - 27a, chọn a = 31 suy ra b = -27.

Khi đó (CD): 31x – 27y +12 = 0 suy ra $D\left(d;\frac{31d+12}{27}\right)$

Ta có: $CD^2 = 90 \Leftrightarrow \left(\frac{31d+93}{27}\right)^2 + (d+3)^2 = 90 \Leftrightarrow (d+3)^2 = \frac{729}{169}\ (ktm)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B(-3;1)}$

Câu 103. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và D, diện tích hình thang bằng 6; CD = 2AB và B(0; 4). Biết điểm $I(3;-1)$, $K(2;2)$ lần lượt nằm trên đường thẳng AD và DC. Viết phương trình đường thẳng AD biết AD không song song với các trục tọa độ.

(*Trích đề thi thử lần 2, THPT Lương Thế Vinh, Hà Nội, năm 2015*)

► Hướng dẫn giải :

* Vì AD không song song các trục tọa độ nên gọi vecto pháp tuyến của AD là:

$$\vec{n}=(1;b)\ (b\neq 0)\Rightarrow\begin{cases} AD: 1(x-3)+b(y+1)=0 \\ AB: bx-(y-4)=0\end{cases}$$

* $S_{ABCD}=AD\dfrac{AB+CD}{2}=\dfrac{3AB}{2}AD=\dfrac{3}{2}d(B;AD)d(K;AB)$

Suy ra $S_{ABCD}=\dfrac{3}{2}\dfrac{|-3+5b|}{\sqrt{b^2+1}}.\dfrac{|2b+2|}{\sqrt{b^2+1}}$

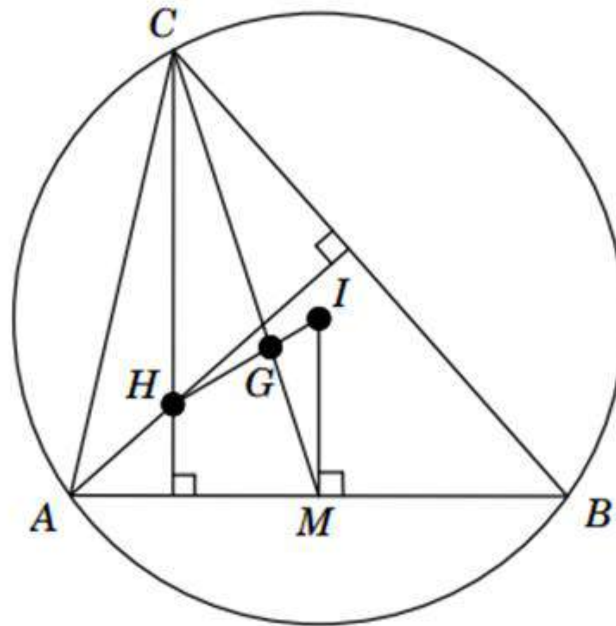
* $S_{ABCD}=6\Leftrightarrow\dfrac{3}{2}\dfrac{|-3+5b|}{\sqrt{b^2+1}}.\dfrac{|2b+2|}{\sqrt{b^2+1}}=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=\dfrac{-5}{3} \\ b=\dfrac{-1\pm 2\sqrt{2}}{7}\end{array}\right.$

Vậy phương trình đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là: $\boxed{\left[\begin{array}{l} x+y-2=0 \\ 3x-5y-14=0 \\ 7x-(1+2\sqrt{2})y-2\sqrt{2}-22=0 \\ 7x-(1-2\sqrt{2})y+2\sqrt{2}-22=0\end{array}\right.}$

Câu 104. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$ và có trực tâm H thuộc đường thẳng $d: x-4y-5=0$. Biết đường thẳng AB có phương trình $2x+y-14=0$ và khoảng cách từ C đến AB bằng $3\sqrt{5}$. Tìm tọa độ điểm C, biết hoành độ điểm C nhỏ hơn 2.

(*Trích đề thi thử THPT Chuyên Lê Khiết, Quãng Ngãi, năm 2015*)

► Hướng dẫn giải :



* Do H thuộc d nên H(4t + 5; t). Gọi G là trọng tâm tam giác ABC

Ta có: $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG} \Rightarrow G\left(\frac{4t+7}{3}; \frac{t+4}{3}\right)$

* Mặt khác, ta có: $d(\text{C; AB}) = 3(\text{G; AB}) \Leftrightarrow 3\sqrt{5} = 3.\frac{|3t-8|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{13}{3} \end{array}\right.$

* Gọi M là trung điểm AB, suy ra tọa độ M là hình chiếu của I trên AB nên M(5; 4)

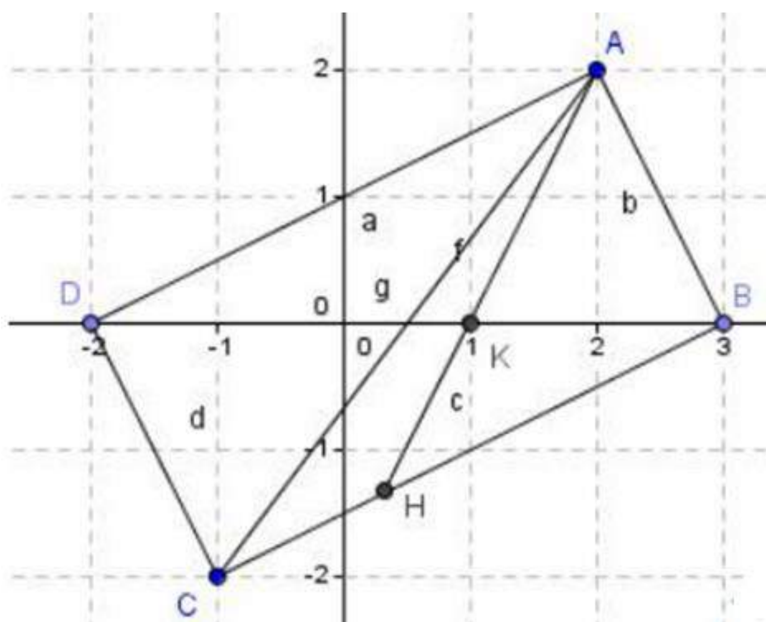
* Với t = 1 ta có $G\left(\frac{11}{5}; \frac{5}{3}\right)$ Từ $\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \Rightarrow C(1;-3)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{C(1;-3)}$

Câu 105. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $\angle ACD = \alpha$ với $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, điểm H thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{HB} = -\overrightarrow{HC}$, K là giao điểm của hai đường thẳng AH và BD. Cho $H\left(\frac{1}{3}; \frac{-4}{3}\right)$, $K(1;0)$ và điểm B có hoành độ dương. Tìm tọa độ các điểm A, B.

(Trích đề thi thử lần 1, THPT Chuyên Đại Học Vinh, năm 2015)

► **Hướng dẫn giải :**



* Do tam giác KAD đồng dạng tam giác KHB suy ra $\frac{KA}{KH}=\frac{AB}{HB}=\frac{BC}{BH}=\frac{3}{2}\Rightarrow KA=\frac{3KH}{2}$

Do K thuộc đoạn AC suy ra $\overrightarrow{KA}=\frac{-3}{2}\overrightarrow{KH}\Rightarrow \boxed{A(2;2)}$

* Đặt B(a; b) với a > 0. Ta có:

$$\cos\alpha=\cos\angle ACD=\cos\angle ABD=\frac{AB}{BD}=\frac{AB}{\frac{5}{2}KB}=\frac{2}{5}.\frac{AB}{KB}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow 4AB^2=5KB^2\Leftrightarrow 4\left[(a-2)^2+(b-2)^2\right]=5\left[(a-1)^2+b^2\right]$$

Suy ra $a^2+b^2+6a+16b-27=0$ (1)

* Đường tròn (C) đường kinh AH có tâm $I\left(\frac{7}{6};\frac{1}{3}\right)$, $R=\frac{AB}{2}=\frac{5\sqrt{5}}{6}$

Nên có phương trình là $(C):\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{125}{36}$

* Do góc ABC bằng 90 độ nên B thuộc đường tròn (C) suy ra:

$$(C):\left(a-\frac{7}{6}\right)^2+\left(b-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{125}{36}\quad (2)$$

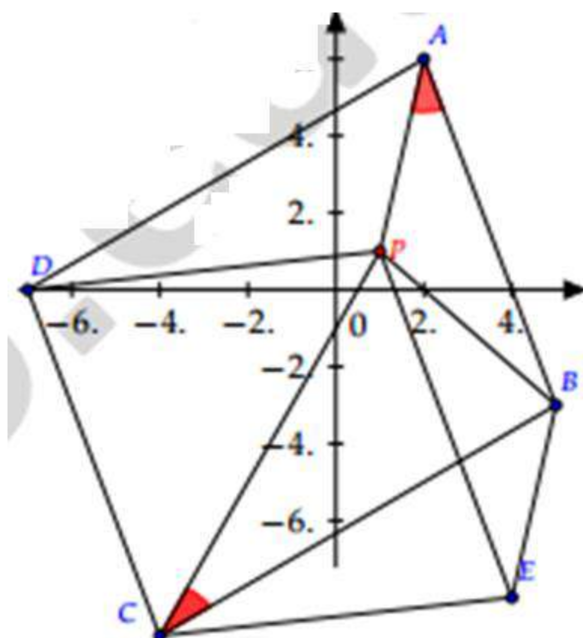
Giải (1) và (2) ta được: $\begin{cases}a=\frac{-1}{5}\\ b=\frac{8}{5}\end{cases}$ *hay* $\begin{cases}a=3\\ b=0\end{cases}$ (do a > 0 nên B(3; 0)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(2;2),B(3;0)}$

Câu 106. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có đỉnh $D(-7;0)$. Một điểm P nằm trong hình bình hành sao cho $\angle PAB=\angle PCB$. Phương trình $d_1: x+y-2=0,\ d_2: 2x-y-1=0$ lần lượt chứa các đoạn thẳng PB, PC. Tìm tọa độ đỉnh A, biết rằng đỉnh A thuộc đường thẳng $y=3x$ và A có hoành độ nguyên.

(*Trích đề thi thử lần 1, Website Tilado.edu.vn, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Dựng hình bình hành ABEP. Ta thấy tứ giác PECD cũng là hình bình hành (do AB //= CD //= PE)

Và $\begin{cases}\angle PAB = \angle PEB \\ \angle PAB = \angle PCB\end{cases} \Rightarrow \angle PEB = \angle PCB$ suy ra tứ giác PBEC nội tiếp

Suy ra $\angle PCE + \angle PBE = 180^0$.

Mà $\begin{cases}\angle PCE = \angle DPC\,(so\,le\,trong) \\ \angle PBE = \angle APB\,(so\,le\,trong)\end{cases} \Rightarrow \angle DPC + \angle APB = 180^0$

Suy ra $\angle APD + \angle BPC = 180^0$ (do tổng 4 góc tại đỉnh P bằng 360 độ)

* Do P là giao điểm PB và PC suy ra P(1; 1) suy ra PD: x – 8y + 7 = 0

Gọi hệ số góc của các đường thẳng đi qua PA là k. Ta thấy $\begin{cases}k_{PA} = k;\ k_{PD} = \dfrac{1}{8} \\ k_{PB} = -1,\ k_{PC} = 2\end{cases}$

Suy ra $\left|\dfrac{k - \frac{1}{8}}{1 + \frac{k}{8}}\right| = \left|\dfrac{-1-2}{1-2}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 5 \\ k = \dfrac{-23}{11}\end{array}\right.$

* Với k = 5, PA: y = 5x – 4 suy ra A: $\begin{cases}5x - y = 4 \\ 3x - y = 0\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{A(2;6)}$

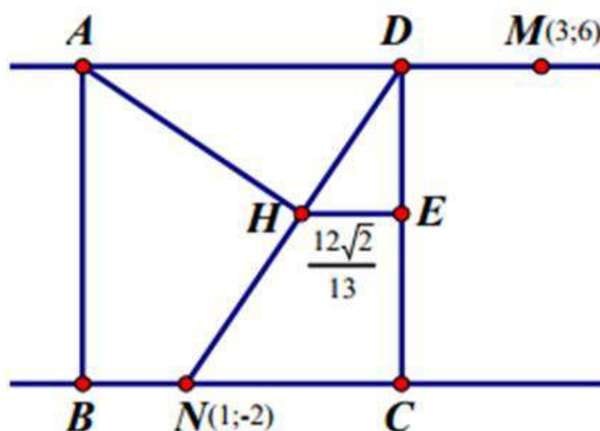
* Với $k = \dfrac{-23}{11} \Rightarrow PA: 23x + 11y - 34 = 0 \Leftrightarrow A\left(\dfrac{782}{113}; \dfrac{-253}{113}\right)\ (l)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(2;6)}$

Câu 107. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Điểm $N(1;-2)$ thỏa mãn $2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$ và điểm $M(3;6)$ thuộc đường thẳng chứa cạnh AD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của đỉnh A xuống đường thẳng DN. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết khoảng cách từ điểm H đến cạnh CD bằng $\dfrac{12\sqrt{2}}{13}$ và đỉnh A có hoành độ là một số nguyên lớn hơn -2.

(Trích đề thi thử THPT Phù Cừ, Hưng Yên, năm 2015)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi E là hình chiếu vuông góc của H trên CD suy ra $HE = \frac{12\sqrt{2}}{13}$

Giả sử cạnh hình vuông bằng a (a > 0). Ta có: $2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

Nên N nằm giữa B và C sao cho $CN = \frac{2CB}{3} = \frac{2a}{3}$ và $DN = \sqrt{CD^2 + CN^2} = \frac{a\sqrt{13}}{3}$

* Ta có: ΔADH đồng dạng ΔDNC $(g-g)$ suy ra $\frac{AD}{DN} = \frac{DH}{NC} = \frac{3a}{a\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow DH = \frac{2a}{\sqrt{13}}$

ΔDHE đồng dạng ΔDNC $(g-g)$ suy ra $\frac{HE}{NC} = \frac{DH}{DN} = \frac{6}{13} \Rightarrow NC = 2\sqrt{2}$

Do đó: $\frac{2a}{3} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 3\sqrt{2}$

* Giả sử vecto pháp tuyến của AD là $\vec{n} = (a;b)$ $(a^2 + b^2 > 0)$

Phương trình AD: ax + by – 3a – 6b = 0

Suy ra $d(N;AD) = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|-2a-8b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow 7a^2 - 16ab - 23b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -b \\ 7a = 23b \end{array}\right.$

* TH1: a = -b suy ra **AD: x – y + 3 = 0**

$NP \perp AD \Rightarrow NP: x + y + 1 = 0 \Rightarrow P = AD \cap NP \Rightarrow P(-2;1)$

$\begin{cases} AP = BN = \sqrt{2} \\ A \in AD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AP^2 = 2 \\ A(m;m+3) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1\ (tm) \\ m = -3\ (ktm) \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{A(-1;2)}$ (m > - 2)

Khi đó $\overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{AP} \Rightarrow \boxed{D(-4;-1)}$. Từ đó tìm được B(2; -1) và C(-1; -4)

* TH2: 7a = 23b suy ra **AD: 23x + 7y - 111 = 0**

$NP \perp AD \Rightarrow NP: 7x - 23y - 53 = 0 \Rightarrow P = AD \cap NP \Rightarrow P\left(\frac{86}{17}; \frac{-13}{17}\right)$

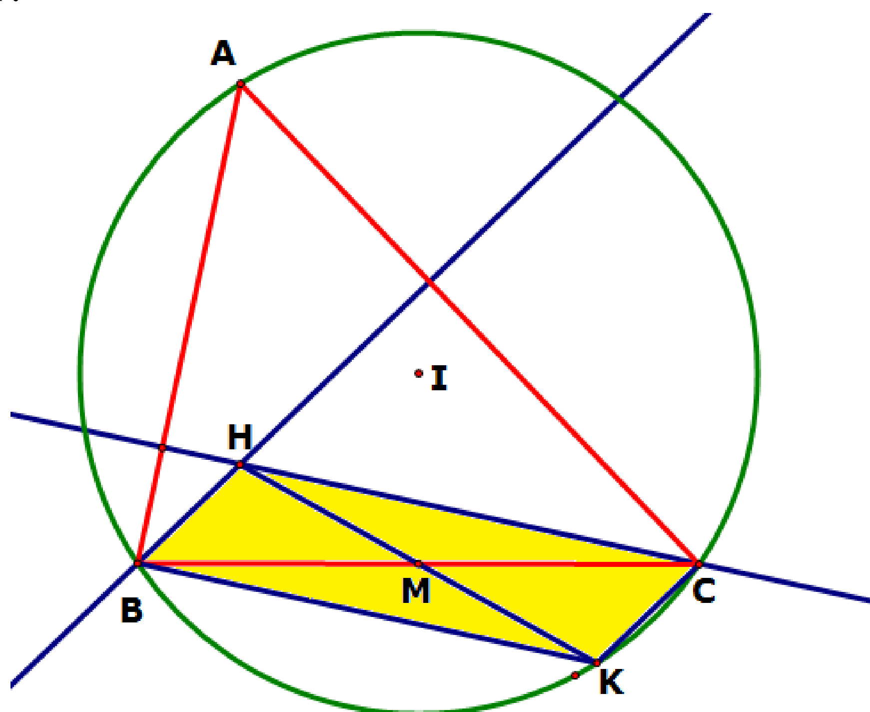
$\begin{cases} AP = BN = \sqrt{2} \\ A \in AD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AP^2 = 2 \\ A(m; \frac{111-23m}{7}) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\frac{93}{17}\ k(tm) \\ m = -\frac{79}{17} (ktm) \end{array}\right.$ (m > - 2)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-1;2),\ B(2;-1),\ C(-1;4), D(-4;-1)}$

Câu 108. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trung điểm cạnh BC là $M(3;-1)$, đường thẳng chứa đường cao kẻ từ B đi qua điểm $E(-1;-3)$ và đường thẳng chứa AC đi qua điểm $F(1;3)$. Điểm đối xứng của đỉnh A qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là điểm $D(4;-2)$. Tìm tọa độ của các đỉnh tam giác ABC.

(*Trích đề thi thử số 1, Website: mathvn.com, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi H là trực tâm của tam giác ABC thì khi đó BHCD là hình bình hành, nên M la trung điểm HD

Suy H(2; 0). BH chứa E(-1; -3) nên BH: x – y – 2 = 0

* Do CD // BH và D(4; -2) thuộc CD nên CD: x – y – 6 = 0

BH vuông góc AC và F(1; 3) thuộc AC nên AC: x + y – 4 = 0

* Do C là giao điểm AC và CD nên tọa độ C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y - 6 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(5;-1)}$$

M(3; - 1) là trung điểm BC nên B(1; -1)

* Do H là trực tâm tam giác ABC nên AH vuông góc BC suy ra AH: x – 2 = 0

Do A là giao điểm AH và AC nên tọa độ A là nghiệm của hệ:

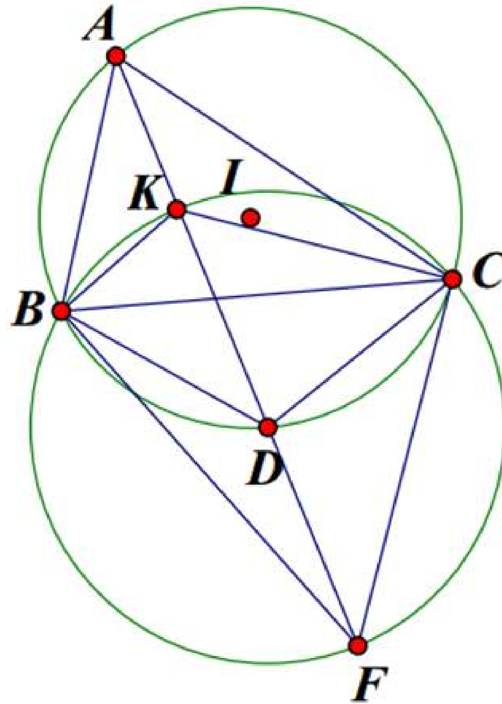
$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(2;2)}$$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(2;2),\ B(1;-1),\ C(5;-1)}$

Câu 109. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(3;5)$ và ngoại tiếp đường tròn tâm $K(1;4)$. Đường tròn tiếp xúc với cạnh BC và các cạnh AB, AC kéo dài (đường tròn bàng tiếp cạnh BC) có tâm là $F(11;14)$. Viết phương trình đường thẳng BC và đường cao qua đỉnh A của tam giác ABC.

(*Trích đề thi thử số 2, Website: mathvn.com, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Ta có giao điểm của đường phân giác trong góc A với đường phân giác ngoài của các góc B và C, suy ra $CF \perp CK, BF \perp BK$, do tứ giác BKCF nội tiếp đường tròn đường kinh FK.

* Gọi D là giao điểm của AK với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có:

$\angle DKC = \frac{\angle BAC}{2} + \frac{\angle ACB}{2} = \angle DCK$ suy ra tam giác DCK cân tại D, do đó DK = DC = DB nên D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BKC hay D là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BKCF.

Do vậy D là trung điểm FK suy ra **D(6; 9)**

* Ta tính được ID = 5, phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

$$(C): (x-3)^2 + (y-5)^2 = 25.$$

$DK = \sqrt{50}$, phương trình đường tròn ngoại tiếp tứ giác BKCF là:

$$(S): (x-6)^2 + (y-9)^2 = 50$$

Tọa độ B, C là nghiệm của hệ: $\begin{cases}(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25\\(x-6)^2 + (y-9)^2 = 50\end{cases} \Rightarrow B(-1;8), C(7;2)$

Vậy phương trình đường BC là: 3x + 4y – 29 = 0

* Phương trình FK: x – y + 3 = 0.

Khi đó A, D là giao điểm của FK và (C) suy ra A(-1; 2).

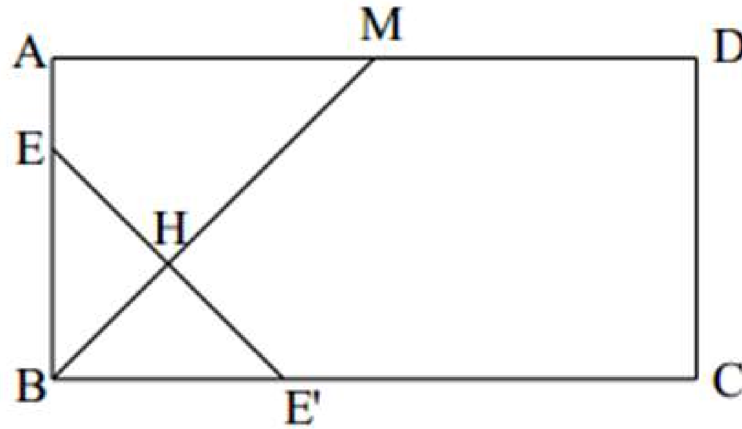
Do đó phương trình đường cao AH là 4x – 3y + 10 = 0.

Vậy phương trình thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{BC: 3x+4y-29=0,\ AH: 4x-3y+10=0}$

Câu 110. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có đường phân giác trong góc $\angle ABC$ đi qua trung điểm của cạnh AD, đường thẳng BM có phương trình $x - y + 2 = 0$, điểm D nằm trên đường thẳng Δ có phương trình $x + y - 9 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết điểm B có hoành độ âm và đường thẳng AB đi qua $E(-1;2)$

(*Trích đề thi thử lần 2, THPT Lý Thái Tổ, Bắc Ninh, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Kẻ đường thẳng đi qua E vuông góc BM tại H và cắt AC tại E' suy ra H là trung điểm EE'.

Phương trình EH là x + y – 1 = 0. H là giao điểm EH và BM suy ra $H\left(\frac{-1}{2};\frac{3}{2}\right)$

Vì H là trung điểm EE' suy ra E'(0;1)

* Giả sử B(b; b + 2) thuộc BM (b < 0) suy ra $\begin{cases}\overrightarrow{BE}=(-1-b;-b)\\ \overrightarrow{BE'}=(-b;-1-b)\end{cases}$

Mà BE vuông góc BE' suy ra 2b(1 + b) = 0 suy ra b = - 1 suy ra **B(-1 ;1)**

* Phương trình cạnh AB: x + 1 = 0

Giả sử A(-1;a) thuộc AB và D(d; 9 – d) thuộc Δ

Do M là trung điểm AB suy ra $M\left(\frac{d-1}{2};\frac{9+a-d}{2}\right)$

* Mặt khác M thuộc BM suy ra **– a + 2d – 6 = 0 (1)**

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AD}=(d+1;9-d-a)\\ \overrightarrow{AB}=(0;1-a)\end{cases}$. Do AB vuông AD nên ta có **– a – d + 9 = 0 (2)**

Từ (1) và (2) ta có a = 4, d = 5 suy ra **A(-1; 4), D(5; 4)**

Do $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow C(5;1)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-1;4),\ B(-1;1),\ C(5;1),\ D(5;4)}$

Câu 111. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình $BC: x-y-4=0$, các tọa độ điểm $H(2;0),\ I(3;0)$ lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Lập phương trình đường AB biết điểm B có hoành độ không lớn hơn 3.

(*Trích đề thi thử lần 1, THPT Nguyễn Văn Trỗi, Hà Tĩnh, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi G(a; b) là trọng tâm tam giác ta có: $\overrightarrow{HG}=2\overrightarrow{GI}\Rightarrow\begin{cases}a-2=6-2a\\ b=-2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{8}{3}\\ b=0\end{cases}\Rightarrow G\left(\frac{8}{3};0\right)$

* Gọi M là trung điểm BC thì MI vuông góc BC nên phương trình đường thẳng MI là

$$\boxed{MI: x+y-3=0}$$

* Mặt khác M là giao điểm MI và BC nên tọa độ M thỏa hệ:

$$\begin{cases} x-y-4=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{M\left(\frac{7}{2};\frac{-1}{2}\right)}$$

* Lại có $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GM} \Rightarrow \boxed{A(1;1)}$. Do $R=IA=\sqrt{5}$ là bán kinh đường tròn ngoại tiếp.

Gọi B(m; m – 4) thuộc BC (trong đó $m \le 3$).

Ta có: $BI^2=5 \Leftrightarrow (m-3)^2+(m-4)^2=5 \Leftrightarrow m=2 \ hay \ m=5$ (So điều kiện ta nhận m = 2)

Vậy AB: 3x + y – 4 = 0

Vậy phương trình thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{AB: 3x+y-4=0}$

Câu 112. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có $D(-6;-6)$. Đường trung trực của đoạn CD có phương trình $d_1: 2x+3y+17=0$ và đường phân giác trong của góc $\angle BAC$ có phương trình $d_2: 5x+y-3=0$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành ABCD.

(Trích đề thi thử lần 1, THPT Yên Lạc 2, Vĩnh Phúc, năm 2015)

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi là trung điểm của CD, do I thuộc đường thẳng d_1 suy ra $I\left(a;\frac{-2a-17}{3}\right)$

Nên $\overrightarrow{DI}=\left(a+6;\dfrac{1-2a}{3}\right)$, đường thẳng d_1 có vecto chỉ phương là $\overrightarrow{u_1}=(-3;2)$

Ta có $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{u_1}=0 \Leftrightarrow a=-2 \Rightarrow I(-4;-3) \Rightarrow \boxed{C(-2;0)}$

* Gọi C' là điểm đối xứng với C qua d_2. Ta có phương trình CC': x – 5y + 2 = 0.

Gọi J là trung điểm CC'. Tọa độ J là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}3x-2y-7=0\\ 5x+y-3=0\end{cases} \Rightarrow \boxed{A(1;-2)}$$

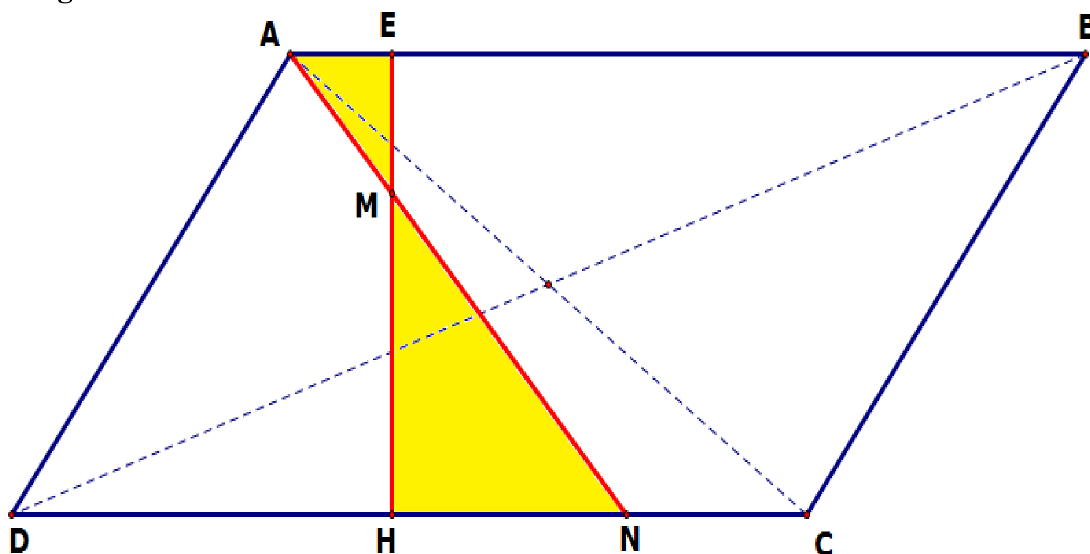
* Do ABCD là hình bình hành nên ta có: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow \boxed{B(5;4)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(1;-2),\ B(5;4),\ C(-2;0)}$

Câu 113. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có điểm $A(2;1)$, điểm $C(6;7)$, $M(3;2)$ là điểm thuộc miền trong hình bình hành. Viết phương trình cạnh AD biết khoảng cách từ M đến CD bằng 5 lần khoảng cách từ M đến AB và đỉnh D thuộc đường thẳng $\Delta: x+y-11=0$.

(*Trích đề thi thử lần 2, THPT Lê Quý Đôn, Hải Phòng, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Kéo dài AM cắt CD tại N, gọi E, H lần lượt là hình chiếu của M lên AB, CD

Theo giả thiết HM = 5ME.

* Do ABCD là hình bình hành nên AB // CD $\Rightarrow \dfrac{MN}{MA}=\dfrac{HM}{EM}=5 \Leftrightarrow MN=5MA$

* Lại có M nằm giữa A và N và $MN=5MA \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=-5\overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \boxed{N(8;7)}$

* Đường thẳng CD đi qua hai điểm C(6; 7) và N(8;7) nên CD: y – 7 = 0

Đỉnh D là giao điểm của CD và $\Delta: x+y-11=0$. nên tọa độ D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}y-7=0\\ x+y-11=0\end{cases} \Rightarrow \boxed{D(4;7)}$$

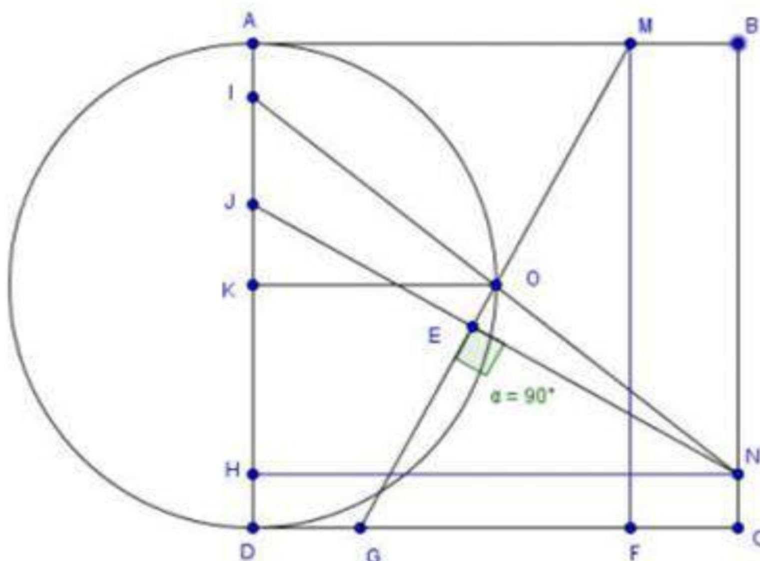
AD đi qua A, D nên AD: 3x – y – 5 = 0 (kiểm tra thấy điểm M thuộc miền trong hình bình hành).

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{AD: 3x-y-5=0}$

Câu 114. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có tâm $O\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{3}{2}\right)$, điểm $M(6;6)$ thuộc cạnh AB và $N(8;-2)$ thuộc cạnh BC. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD.

(*Trích đề thi thử lần 1, THPT Số 3 Bảo Thắng, Lào Cai, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi G là điểm đối xứng của M qua O suy ra G(1; -3) thuộc CD

I là điểm đối xứng của N qua O suy ra I(-1; 5) thuộc AD

Phương trình MI qua M nhận $\overrightarrow{MO}$ làm vecto chỉ phương có dạng là: 9x – 5y – 24 = 0.

Suy ra phương trình NE qua N và vuông góc MI là: 5x + 9y – 22 = 0.

Gọi E là hình chiếu của N trên MG suy ra E là giao điểm NE và MG $\Rightarrow E\left(\frac{163}{53};\frac{39}{53}\right)$

* Lại có: $NE\perp MG \Rightarrow \begin{cases} NJ\perp MG \\ \overrightarrow{NE}=k\overrightarrow{NJ} \end{cases}(k\neq 0; k\in R)$ suy ra J(-1; 3)

Do đó AD: x + 1 = 0 nên $OK=\frac{9}{2}$. Vì AK = OK nên K, O, D cùng thuộc đường tròn tâm K đường kinh OK có phương trình là:

$$(x+1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{81}{4}$$

* Vậy tọa độ A và D là nghiệm của hệ: $\begin{cases} (x+1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{81}{4} \\ x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1; y=6 \\ x=-1; y=-3 \end{array}\right.$

Suy ra A(-1;6), D(-1; -3) suy ra C(8;-3), B(8;6)

Với D(-1;6), A(-1;-3) loại do M thuộc CD.

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-1;6),\ B(8;6),\ C(8;-3),\ D(-1;-3)}$

Câu 115. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có $A(-2;0)$, C nằm trên đường thẳng có phương trình $x+y-3=0$, đường thẳng MN, với M là trung điểm cạnh BC, N là điểm nằm trên cạnh AD sao cho AN = 2ND, có phương trình $7x-5y-6=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D.

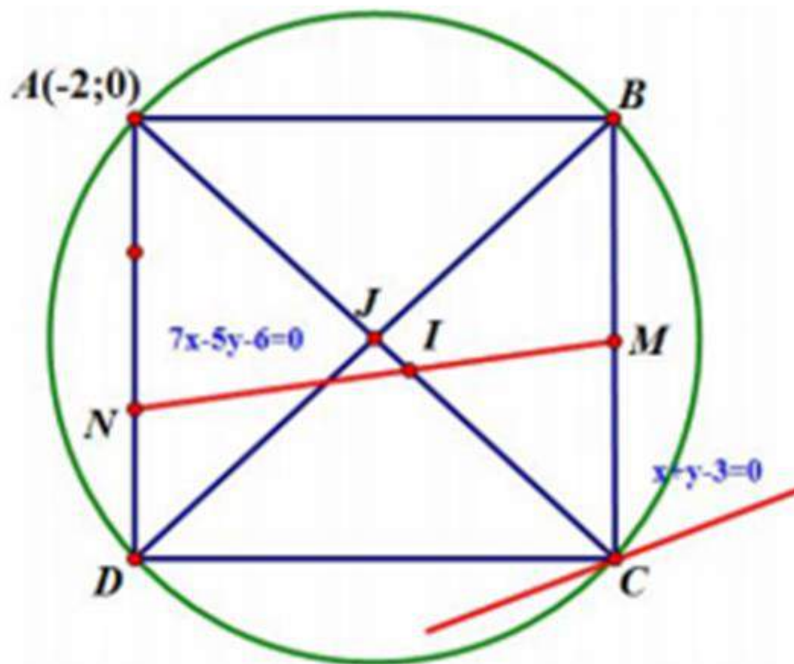
(*Trích đề thi thử Số 3, Website: mathvn.com , năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi I là giao điểm giữa AC và MN.

Do tam giác AIN đồng dạng tam giác CIM nên ta có:

$$\frac{AI}{CI}=\frac{AN}{CM}=\frac{\frac{2AD}{3}}{\frac{AD}{2}}=\frac{4}{3}\Rightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{-4}{3}\overrightarrow{CI}$$



* Do C thuộc đường thẳng x + y – 3 = 0 nên C(c; 3 – c). Suy ra: $I\left(\frac{-6+4c}{7};\frac{12-4c}{7}\right)$

Mặt khác I thuộc 7x – 5y – 6 = 0 nên c = 3 suy ra C(3; 0)

* Gọi J là trung điểm AC suy ra $J\left(\frac{1}{2};0\right)$.

Phương trình đường tròn đường kinh AC là: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{25}{4}$

Phương trình đường thẳng BD (trung trực của đoạn AC) là 2x – 1 = 0

* Tọa độ B, D là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{25}{4}\\ 2x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2};y=\frac{5}{2}\\ x=\frac{1}{2};y=\frac{-5}{2}\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện M là trung điểm BC nên ta nhận: $B\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$, $D\left(\frac{1}{2};\frac{-5}{2}\right)$

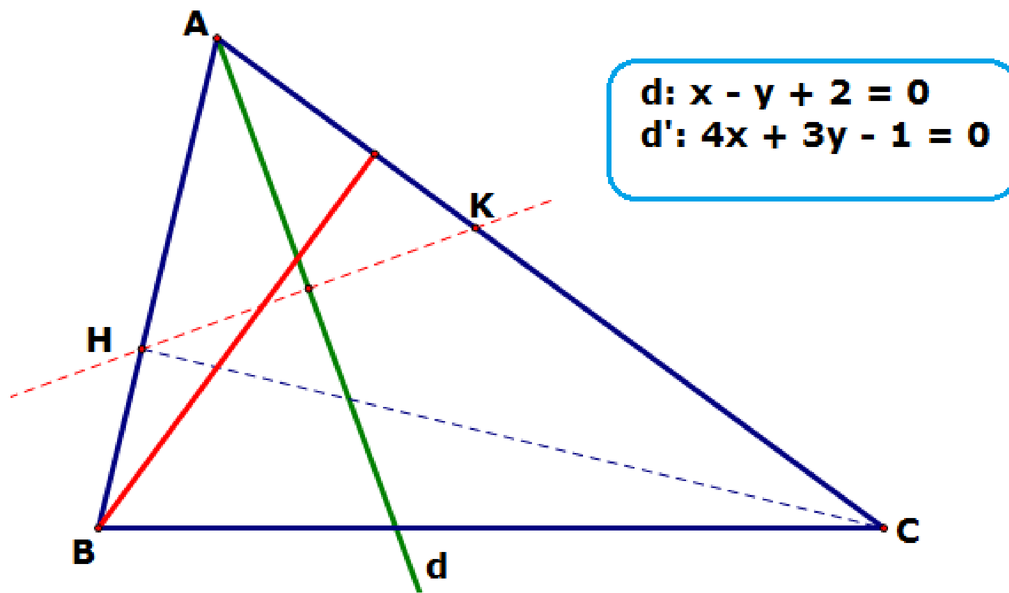
Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right),\ C(3;0),\ D\left(\frac{1}{2};\frac{-5}{2}\right)}$

Câu 116. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đường phân giác trong góc A có phương trình $d: x-y+2=0$ và đường cao hạ từ B có phương trình $d': 4x+3y-1=0$. Biết hình chiếu của C lên AB là điểm $H(-1;-1)$. Tìm toa độ các đỉnh A, B, C.

(*Trích đề thi thử THPT Lê Xoay, Vĩnh Phúc, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi K là điểm đối xứng với H qua đường phân giác trong góc A. Khi đó K thuộc đường thẳng AC. Đường thẳng HK có phương trình: x + y + 2 = 0.



Gọi I là giao điểm của HK và đường phân giác trong góc A thì tọa độ I là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} x-y+2=0 \\ x+y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I(-2;0)}$. Do I là trung điểm HK nên suy ra **K(-3; 1).**

* Khi đó AC qua K và vuông góc với d' suy ra AC:

$$3(x+3)-4(y-1)=0 \Leftrightarrow 3x-4y+13=0$$

A có tọa độ thỏa hệ $\begin{cases} x-y+2=0 \\ 3x-4y+13=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(5;7)}$

* AB có phương trình $\frac{x+1}{6}=\frac{y+1}{8} \Leftrightarrow 4x-3y+1=0$

B có tọa độ thỏa hệ $\begin{cases} 4x+3y-1=0 \\ 4x-3y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B\left(0;\frac{1}{3}\right)}$

* HC có phương trình $3(x+1)+4(y+1)=0 \Leftrightarrow 3x+4y+7=0$

C có tọa độ thỏa hệ $\begin{cases} 3x+4y+7=0 \\ 3x-4y+13=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{-10}{3};\frac{3}{4}\right)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(5;7),\ B\left(0;\frac{1}{3}\right),\ C\left(\frac{-10}{3};\frac{3}{4}\right)}$

Câu 117. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại B nội tiếp đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-10y-25=0$. I là tâm đường tròn (C), đường thẳng BI cắt đường tròn (C) tại M(5; 0). Đường cao kẻ từ C cắt đường tròn (C) tại $N\left(\frac{-17}{5};\frac{-6}{5}\right)$. Tìm tọa độ A, B, C biết hoành độ điểm A dương.

(*Trích đề thi thử THPT Nguyễn Thị Minh Khai, Hà Tĩnh, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**

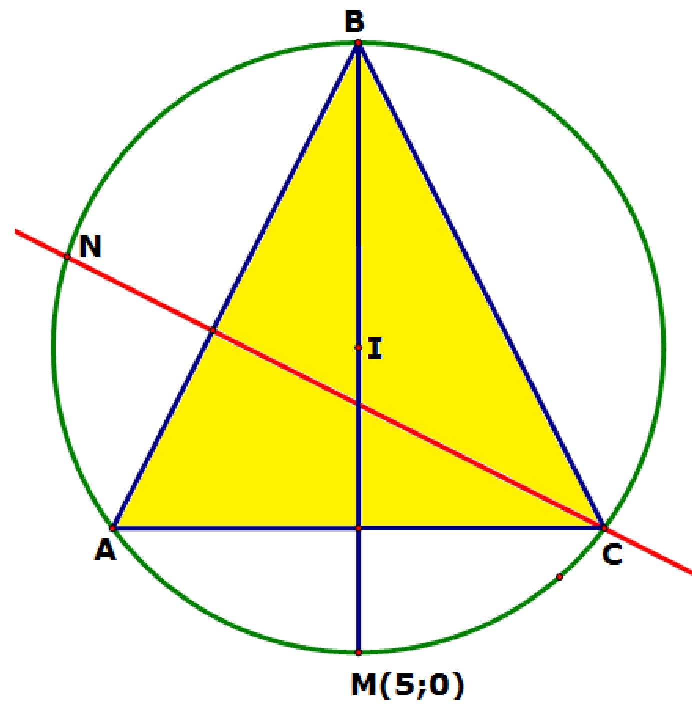
* Ta có I(0; 5). Do I là trung điểm BM suy ra B(-5; 10).

Ta có: $\angle ABM = \angle ACN$ (cùng phụ với $\angle BAC$) nên A là trung điểm cung MN.

* IA vuông góc MN nên AI có phương trình là 7x + y – 5 = 0

Khi đó tọa độ A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 7x+y-5=0 \\ x^2+y^2-10y-25=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-5=-7x \\ x^2+(y-5)^2=50 \end{cases} \Rightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\ (tm) \\ x=-1\ (ktm) \end{array}\right.$$



* Đường thẳng BI: x + y – 5 = 0. Do tam giác ABC cân tại B nên C đối xứng với A qua BI

AC vuông góc BI nên AC: x – y – 3 = 0.

* Gọi H là giao điểm của BI và AC suy ra tọa độ H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-y-3=0 \\ x+y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{H(4;1)}$$

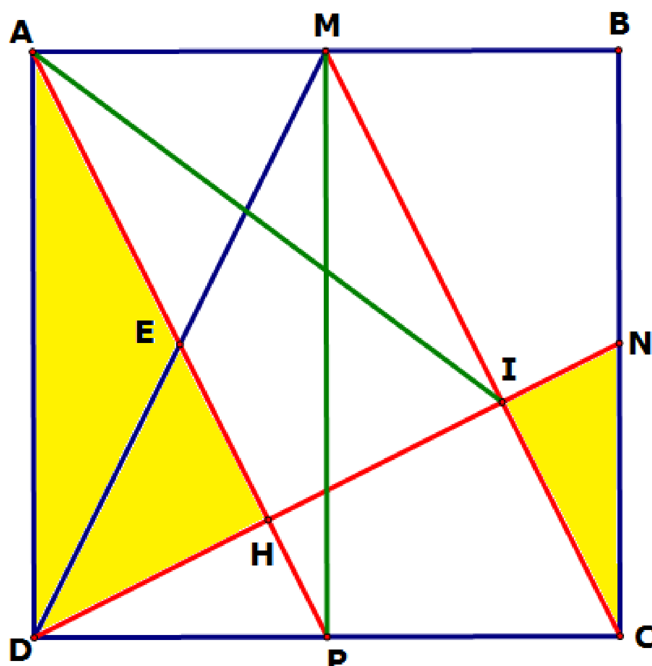
Do H là trung điểm AC nên **C(7;4)**

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(1;-2),\ B(-5;10),\ C(7;4)}$

Câu 118. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC, biết CM cắt DN tại $I\left(\frac{22}{5};\frac{11}{5}\right)$, gọi H là trung điểm DI, biết đường thẳng AH cắt CD tại $P\left(\frac{7}{2};1\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết hoành độ A nhỏ hơn 4.

(Trích đề thi thử THPT Nghèn, Hà Tĩnh, năm 2015)

► **Hướng dẫn giải :**



* Ta có tam giác MBC bằng tam giác NCD do đó $MC \perp DN$.

Vì $AH \perp DN$ nên AMCP là hình bình hành và P là trung điểm CD và góc $\angle AIP = 90^0$

Đường thẳng AI vuông góc PI qua I nên có dạng: 3x + 4y – 22 = 0.

* Gọi $A(2-4a;4+3a) \Rightarrow \overrightarrow{IA} = \left(-4a-\frac{12}{5};3a+\frac{9}{5}\right)$

Lại có: $AI = 2PI \Leftrightarrow \left(4a+\frac{12}{5}\right)^2 + \left(3a+\frac{9}{5}\right)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=\frac{-6}{5} \end{array}\right.$

* Nếu a = 0 thì A(2; 4)

Nếu a = $\frac{-6}{5}$ thì $A\left(\frac{34}{5};\frac{2}{5}\right)$ (loại)

Đường thẳng AP: 2x + y – 8 = 0, DN vuông góc AP và đi qua I nên: AI: x – 2y = 0.

Ta có $DN \cap AP = H\left(\frac{16}{5};\frac{8}{5}\right) \Rightarrow D(2;1) \Rightarrow C(5;1) \Rightarrow B(5;4)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(2;4),\ B(5;4),\ C(5;1),\ D(2;1)}$

Câu 119. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) có phương trình $(C): \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{325}{16}$. Đường phân giác trong góc BAC cắt (C) tại điểm $E\left(0;\frac{-7}{2}\right)$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết đường thẳng BC đi qua điểm $N(-5;2)$, đường thẳng AB đi qua điểm $P(-3;-2)$

(*Trích đề thi thử số 2, Website: dethithudaihoc.com , năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**

* Tâm của (C) là $I\left(\frac{5}{2};\frac{1}{4}\right)$. Vì AE là phân giác góc BAC nên E là điểm nằm chính giữa cung BC hai IE vuông góc BC. Suy ra $\overrightarrow{EI} = \left(\frac{5}{2};\frac{15}{4}\right)$ là một vecto pháp tuyến của đường thẳng BC.

Suy ra phương trình BC: 2x + 3y + 4 = 0.

* Khi đó tọa độ B và C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{325}{16} \\ 2x+3y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2; y=0 \\ x=4; y=-4 \end{array}\right.$

* TH1: B(-2; 0), C(4; -4). Ta có AB: 2x – y + 4 = 0.

Khi đó tọa độ A, B là nghiệm cua hệ: $\begin{cases} \left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{325}{16} \\ 2x-y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2; y=0 \\ x=0; y=4 \end{array}\right.$

Do B(-2; 0) nên A(0; 4)

* TH2: C(-2; 0), B(4; -4). Ta có AB: 2x + 7y + 20 = 0.

Khi đó tọa độ A, B là nghiệm cua hệ: $\begin{cases} \left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{325}{16} \\ 2x+y+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4; y=-4 \\ x=\dfrac{-54}{53}; y=\dfrac{-136}{53} \end{array}\right.$

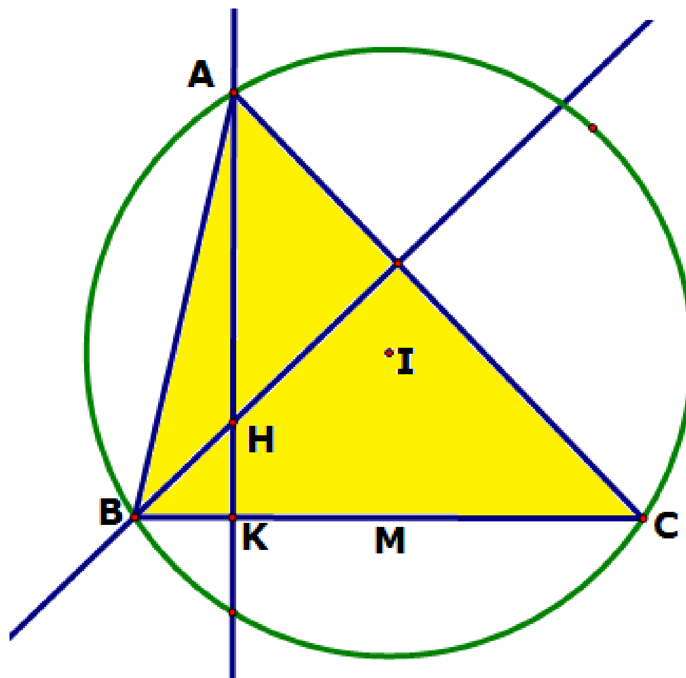
Do B(4; - 4) nên ta có $A\left(\dfrac{-54}{53};\dfrac{-136}{53}\right)$ (không tỏa AE là phân giác trong nên loại)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(0;4),\ B(-2;0),\ C(4;-4)}$

Câu 120. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho gọi $H(3;-2), I(8;11), K(4;-1)$ lần lượt là trực tâm của đường tròn ngoại tiếp, chân đường cao vẽ từ A của tam giác ABC. Tìm tọa độ các điểm A, B, C.

(*Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Hồ Chí Minh , năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* $\overrightarrow{HK}=(1;1) \Rightarrow HK: x-y-5=0,\ BC: x+y-3=0$

Gọi M là trung điểm của BC suy ra $IM \perp BC \Rightarrow IM: x-y+3=0$

Khi đó tọa độ M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-y+3=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{M(0;3)}$

* Ta có: $\overrightarrow{HA}=2\overrightarrow{MI}=(16;16) \Rightarrow \boxed{A(19;14)}$

Gọi $B(b;3-b)\in BC\Rightarrow C(-b;b+3)\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{BH}=(3-b;b-5)\\ \overrightarrow{CA}=(19+b;11-b)\end{cases}$

* Ta có: $BH\perp AC\Leftrightarrow\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA}=0\Leftrightarrow(3-b)(19+b)+(b-5)(11-b)=0\Leftrightarrow b=\pm1$

* Với b = 1, ta có B(1; 2), C(-1; 4)

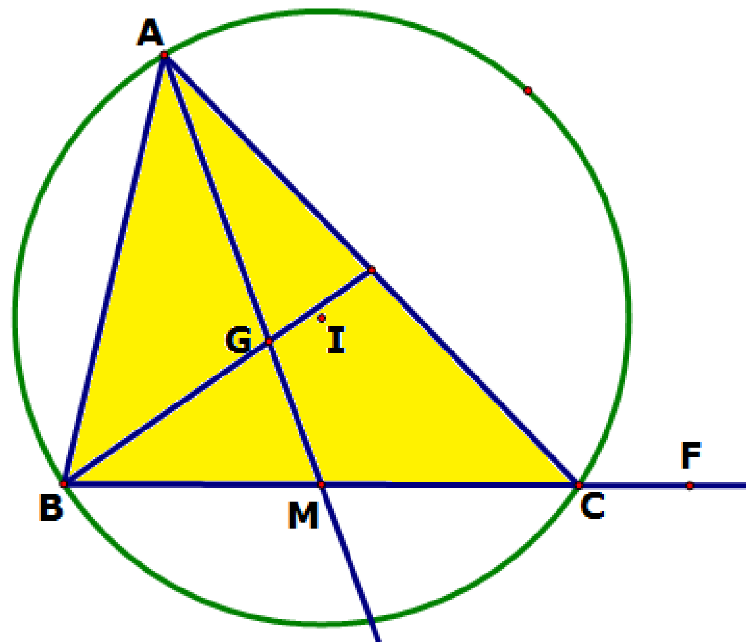
Với b = -1, ta có: B(-1; 4), C(1; 2).

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(19;14),\ B(1;2),\ C(-1;4)\ hay\ A(19;14),\ B(1;-4),\ C(1;2)}$

Câu 121. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trọng tâm $G\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(1;-2)$, điểm $E(10;6)$ thuộc đường thẳng chứa trung tuyến kẻ từ A và điểm $F(9;-1)$ thuộc đường thẳng BC. Tìm tọa độ các điểm A, B, C biết B có tung độ bé hơn 2.

(*Trích đề thi thử lần 2, THPT Chuyên Đại Học Vinh, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi M là trung điểm BC. Phương trình GE hay AM là: 4x – 7y = 0.

$M\in AM\Rightarrow M(3+7m;2+4m)$.

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{IM}=(7m+2;4m+4)\\ \overrightarrow{FM}=(7m-6;4m+3)\end{cases}$

* Vì IM vuông góc FM nên ta có:

$IM\perp FM\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{FM}=0\Leftrightarrow(7m+2)(7m-6)+(4m+4)(4m+3)=0\Leftrightarrow m=0\Rightarrow\boxed{M(3;2)}$

* Giả sử $A\in AM\Rightarrow A(3+7a;2+4a)$.

$\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GM}\Rightarrow a=-1\Rightarrow\boxed{A(-4;-2)}$

Suy ra phương trình BC: x + 2y – 7 = 0. Nên $B(-2b+7;b)\in BC\ (b<2)$

* Vì IB = IA nên $(-2b+6)^2+(b+2)^2=25\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=1\ (tm)\\ b=3\ (ktm)\end{array}\right.$

Suy ra B(5;1) nên C(1;3) vì M là trung điểm BC.

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-4;-2),\ B(5;1),\ C(1;3)}$

Câu 122. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A(0; 4), I(3; 0) là trung điểm cạnh BC. Điểm D(6; 0) thuộc đoạn IC. Tìm tọa độ E, F lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD và ACD.

(*Trích đề thi thử lần 4, THPT Chuyên Đại Học Sư Phạm Hà Nội, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**

* Trong tam giác ABC, I là trung điểm của cạnh huyền BC nên các tam giác IAB và IAC cân tại I.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC.

Ta có IM và EM vuông góc với AB nên ba điểm I, E, M thẳng hàng.

Tương tự, ba điểm I, N, F thẳng hàng. Do đó MN cắt AD tại K là trung điểm của AD.

* Hai đường tròn (E) và (F) có dây cung chung AD nên EF là trung trực của AD

Như vậy, E, F là giao điểm của đường trung trực đoạn AD với IM và IN.

* Đường thẳng ID: y = 0. Gọi B(b; 0), C(c; 0)

Ta có IB = IA = IC nên b, c là nghiệm của phương trình

$(x-3)^2 = 9+16 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=-2 \end{array}\right.$. mặt khác, $\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IC}$ cùng chiều nên ta nhận B(-2; 0), C(8; 0)

Suy ra M(-1; 2), N(4; 2)

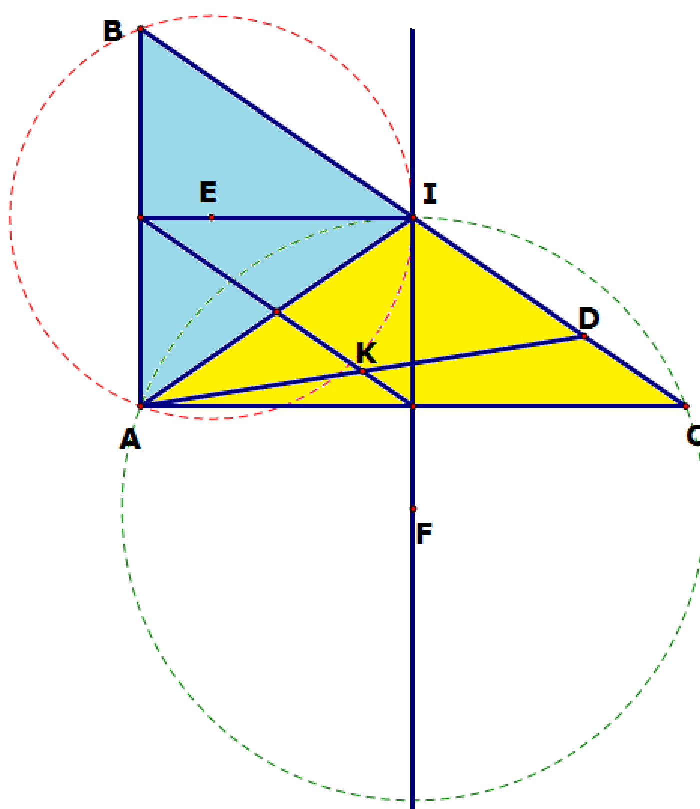
* Đường thẳng IM: x + 2y – 3 = 0, đường thẳng IN: 2x – y – 6 = 0

Ta có K(3;2) suy ra đường trung trực đoạn AD: 3x – 2y – 5 = 0

Tọa độ E là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x-2y-5=0 \\ x+2y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{E\left(2;\frac{1}{2}\right)}$

Tọa độ F là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x-2y-5=0 \\ x-2y-6=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{F(7;8)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{E\left(2;\frac{1}{2}\right), F(7;8)}$

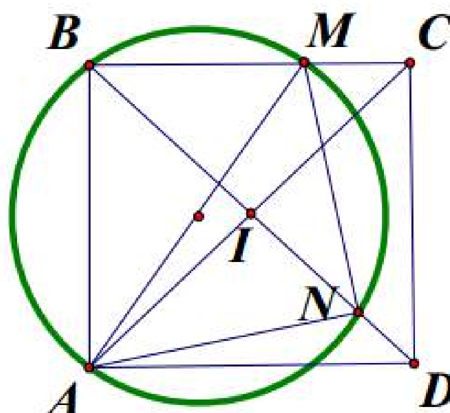


Câu 123. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD, đường tròn đường kính AM cắt cạnh BC tại hai điểm B, $M(5;7)$ và cắt đường chéo BD tại $N(6;2)$, đỉnh C thuộc đường thẳng $d: 2x-y-7=0$. Tìm

tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD, biết hoành độ đỉnh C nguyên và hoành độ A bé hơn 2.

(*Trích đề thi thử số 6, Diễn đàn k2pi.net , năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Từ giả thuyết ta dễ dàng có được tam giác ANM vuông tại N

Mặt khác ta có: $\angle AMN = \angle ABN$ (góc nội tiếp chắn cung AN)

Mà $\angle ABN = 45^0 \Rightarrow \angle AMN = 45^0$

Vậy tam giác AMN vuông cân tại N.

* Gọi $A(a;b)$. Ta có: $\overrightarrow{NM} = (-1;5), \overrightarrow{NA} = (a-6;b-2)$.

Do tam giác AMN vuông cân tại N nên ta có: $\begin{cases} NA \perp NM \\ NA = NM \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NM} = 0 \\ NA^2 = NM^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (-1)(a-6)+5(b-2)=0 \\ (a-6)^2+(b-2)^2 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=11 \\ b=3 \end{cases} \end{array} \right.$ Do A có hoành độ bé hơn 2 nên ta nhận **A(1; 1)**

Lại có: BD là trung trực của AC, BD qua N nên ta có **NA = NC**

* Kết hợp với NA = NM nên ta có: NA = NM = NC. Suy ra N là tâm đường tròn ngại tiếp tam giác AMC.

Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC tâm N(6;2) và bán kinh $R = NA = \sqrt{26}$

Do đó $(C):(x-6)^2+(y-2)^2 = 26$. Mặt khác C thuộc đường thẳng Δ nên tọa độ C thỏa hệ:

$\begin{cases} 2x-y-7=0 \\ (x-6)^2+(y-2)^2 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=7 \\ y=7 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{-9}{5} \\ y=\dfrac{13}{5} \end{cases} \end{array} \right.$. Do hoành độ C nguyên nên ta nhận **C(7; 7)**

Gọi I là tâm hình vuông suy ra **I(4; 4).**

* Do BD qua I và vuông góc AC nên ta có: **BD: x + y – 8 = 0.**

Mặt khác BC đi qua M và C nên có phương trình: **BC: y – 7 = 0.**

B là giao điểm của BD và BC suy ra **B(1; 7)** suy ra **D(7;1)** (do I là trung điểm BD

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(1;1),\ B(1;7),\ C(7;7),\ D(7;1)}$

► **Bình luận :** *trong quá trình giải, nếu người giải không phát hiện N là tâm đường tròn ngoại tiếp AMC, thì có thể tham số tọa độ điểm C và sử dụng góc hợp bởi MC và AC là 45 độ.*

*Tuy nhiên với cách làm này, học sinh phải **giải phương trình bậc 4,** về phương diện chủ quan thì bài toán có thể không cho C chạy trên đường thẳng cho trước, nhưng kh iđó phải giải phương trình, hệ phương trình có thể khá rắc rối, không khả thi trong lúc làm bài thi nên tác giả đã đưa thêm giả thiết C thuộc đường thẳng vào trong đề.*

Cũng cần phải lưu ý nếu người giải không tìm B và D theo như lời giải trên mà sử dụng các tích vô hướng thì cần kiểm tra lại hình vẽ vì sẽ có một nghiệm hình không thỏa đề bài.

Câu 124. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có $x+y-5=0$ là phương trình đường chéo AC. Trên tia đối của tia CB lấy điểm M và trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho DN = BM. Đường thẳng song song với AN kẻ từ M và đường thẳng song song với AM kẻ từ N cắt nhau ở $F(0;-3)$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD, biết điểm M nằm trên trục hoành.

(*Trích đề thi thử số 7, Diễn đàn k2pi.net , năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi cạnh hình vuông ABCD là a. (a > 0).

Tam giác ABM vuông tại B có: $AM^2=(CM+a)^2+a^2$, Vì ND = BM = a + CM.

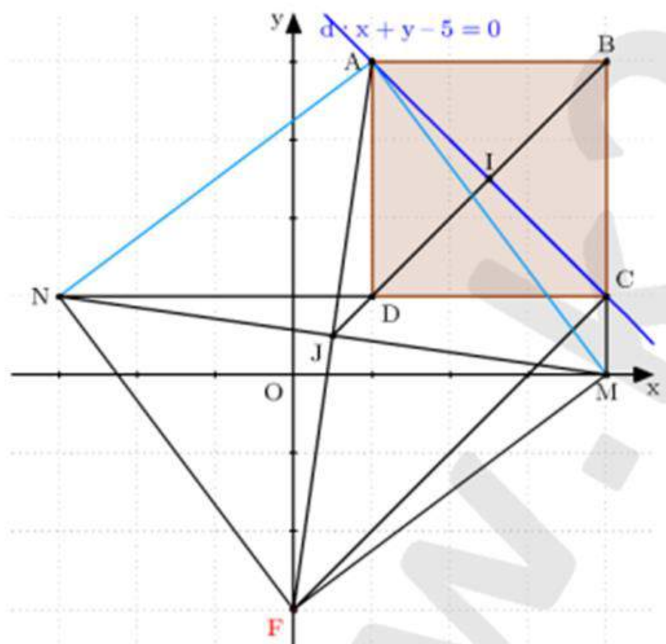
ΔADN vuông tại D có: $AN^2=(CM+a)^2+a^2$

$\Delta NCM \perp C$, ta có: $MN^2=AM^2+AN^2 \Rightarrow \Delta NAM$ vuông cân tại A nên ANFM là hình vuông.

* Tứ giác AFMC có góc $\angle ACM=180^0-\angle ACB=135^0$, và góc $\angle AFM=45^0$, nên nội tiếp trong đường tròn đường kinh AF suy ra FC vuông góc AC.

Do đó tọa độ C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+y-5=0 \\ x-y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D(4;1)}$$



* Góc của AC với trục hoành là 45^0 nên BC và CD sẽ có phương trình là x = 4 hay y = 1.

Do BC cắt OX tại M nên BC: x – 4 = 0 suy ra M(4; 0).

MA vuông góc MF nên tọa độ của A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+y-5=0 \\ -4x-3y+16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(1;4)}$$

* AD song song BC nên AD: x – 1 = 0 mà CD: y – 1 = 0 nên **D(1; 1)**

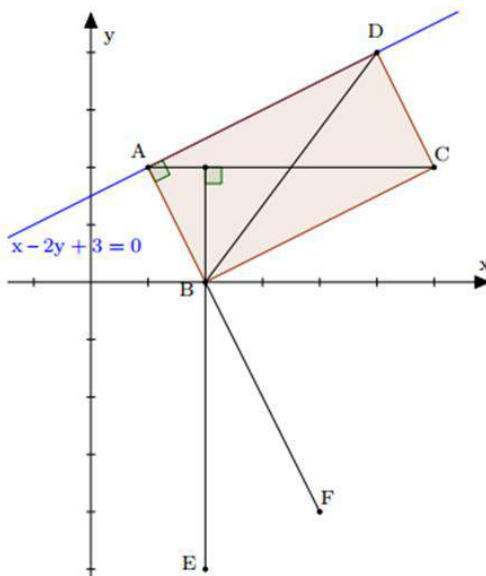
AB song song CD nên y – 4 = 0 suy ra **B(4; 4)**.

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(1;4),\ B(4;4),\ C(4;1),\ D(1;1)}$

Câu 125. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $x-2y+3=0$ là phương trình đường thẳng chứa cạnh AD. Trên đường thẳng qua B và vuông góc với đường chéo AC, lấy điểm E(2; - 5) sao cho $BE=AC$ (D và E nằm khác phía so với đường thẳng AC). Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật biết đường thẳng AB đi qua điểm $F(4;-4)$ và điểm D có hoành độ dương.

(*Trích đề thi thử số 8, Diễn đàn k2pi.net , năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Phương trình AB qua F vuông góc AD là 2x + y – 4 = 0.

Tọa độ A thỏa hệ: $\begin{cases}2x+y-4=0\\x-2y+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\Rightarrow\boxed{A(1;2)}$

* Tham số hóa tọa độ các điểm B và C ta được: $B(b;4-2b),\ D(2d-3;d)$

Do ABCD là hình chữ nhật nên ta có: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow C(b+2d-4;d-2b+2)$

* Theo đề bài ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{EB}=0\\BD=BE\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(b-2)(b+2d-5)+(d-2b)(9-2d)=0\\(2d-b-3)^2+(d+2b-4)^2=(b-2)^2+(9-2b)^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b^2+6bd-25b-2d^2+5d+10=0\\6b=-d^2+4d+12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\d=4\end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(1;2),\ B(2;0),\ C(6;2),\ D(5;4)}$

Câu 126. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác nhọn ABC có $H\left(\frac{5}{2};\frac{9}{2}\right)$ là trực tâm, $M\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$ là trung điểm của BC, $P\left(\frac{1}{2};\frac{11}{2}\right)$, $Q(6;-1)$ lần lượt là các điểm thuộc AB, AC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

(*Trích đề thi thử số 9, Diễn đàn k2pi.net , năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải cách 1:**

* Gọi AD là đường kinh đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Xét AB vuông góc BD và CH vuông góc AB suy ra BD // CH.

Tương tự ta có: BH // CD suy ra ra BHCD là hình bình hành.

Suy ra M là trung điểm HD.

* Gọi P’ là giao điểm PH và AC. Theo đề bài, ta có : $\overrightarrow{HP}.\overrightarrow{HM}=0 \Rightarrow HP \perp HM$

Suy ra các tứ giác DPHD và CDHP nội tiếp được

$\Rightarrow \angle DPH = \angle DBH = \angle DCH = \angle DP'H \Rightarrow \Delta DPP'$ cân tại D

Suy ra HP = HP’. Tọa độ **P(3; 10).**

* Phương trình AC: 3x + y – 17 = 0.

Thấy ngay $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{u_{AC}} \Rightarrow PM // AC \Rightarrow P$ là trung điểm AB.

Tọa độ $D\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. Gọi A(a; 17 – 3a) thuộc đường AC suy ra B(1 – a; 3a – 6).

* Ta có: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=0 \Leftrightarrow (1-2a)\left(a-\frac{1}{2}\right)+(6a-23)\left(\frac{13}{2}-3a\right)=0 \Leftrightarrow 2a^2-11a+15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3\ (tm) \\ a=\frac{5}{3}\ \text{(ktm)} \end{array}\right.$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(3;8),\ B(-2;3),\ C(5;2)}$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Gọi B(a; b), do M là trung điểm BC suy ra C(3 – a; 5 – b).

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{PB}=\left(a-\frac{1}{2};b-\frac{11}{2}\right) \\ \overrightarrow{QC}=\left(-3-a;6-b\right) \\ \overrightarrow{HB}=\left(a-\frac{5}{2};b-\frac{9}{2}\right) \\ \overrightarrow{HC}=\left(\frac{1}{2}-\text{a};\frac{1}{2}-b\right) \end{cases}$.

* Ta có H là trực tâm tam giác ABC nên:

$$\begin{cases} \overrightarrow{PB}.\overrightarrow{HC}=0 \\ \overrightarrow{QC}.\overrightarrow{HB}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(a-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-a\right)+\left(b-\frac{11}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)=0 \\ \left(a-\frac{5}{2}\right)\left(-3-a\right)+\left(b-\frac{9}{2}\right)\left(6-b\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2-a-6b+3=0 & (1) \\ a^2+b^2+\dfrac{a}{2}-\dfrac{21b}{2}=\dfrac{-39}{2} & (2) \end{cases}$$

* Lấy (1) trừ (2) ta được – a + 3b = 11 suy ra **a = 3b – 11** thay vào (1) ta được:

$$10b^2-75b+135=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=3 \Rightarrow a=-2 \\ b=\dfrac{9}{2} \Rightarrow a=\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$$

* Với $a=-2,\ b=3 \Rightarrow B(-2;3),\ C(5;2) \Rightarrow A(3;8)$

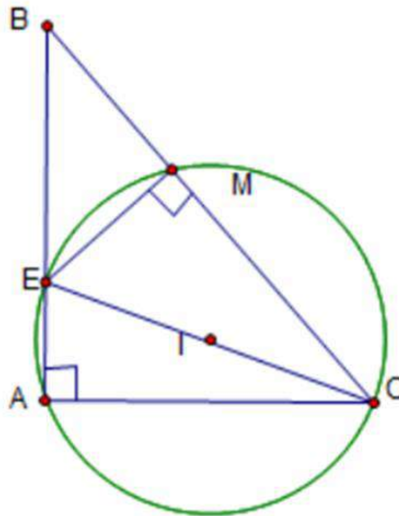
* Với $a=\dfrac{9}{2},\ b=\dfrac{5}{2} \Rightarrow B\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{9}{2}\right) \equiv H\ (loai)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(3;8),\ B(-2;3),\ C(5;2)}$

Câu 127. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, đỉnh $B(-5;2)$, phương trình đường thẳng AC là: $AC: x-y-1=0$. Trên tia BC lấy điểm M sao cho BM.BC = 48. Tìm tọa độ điểm C biết rằng tam giác AMC có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\sqrt{10}$.

(*Trích đề thi minh họa lần 1, Website Moon.vn , năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Giả sử E là giao điểm của AB và đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác AMC.

Khi đó ta có EC là đường kinh vì góc EAC bằng 90 độ.

Tứ giác AEMC là từ giác nội tiếp nên góc EMC bằng 90 độ.

* Theo phương tích ta có: BM.BC = BE.BA = 48

Hay ta có: $\cos\angle ABE=\dfrac{BM}{BE}=\dfrac{AB}{BC} \Rightarrow BC.MB=BA.BE=48$

* Phương trình AB là: x + y + 3 = 0. A là giao điểm của AB và AC nên tọa độ A thỏa hệ:

$$\begin{cases} x+y+3=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-1;-2)}$$

* Khi đó độ dài $AB=4\sqrt{2} \Rightarrow BE=6\sqrt{2}$

Ta có: $\overrightarrow{BE}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BA} \Rightarrow \boxed{E(1;-4)}$. Gọi C(c; c – 1) thuộc AC.

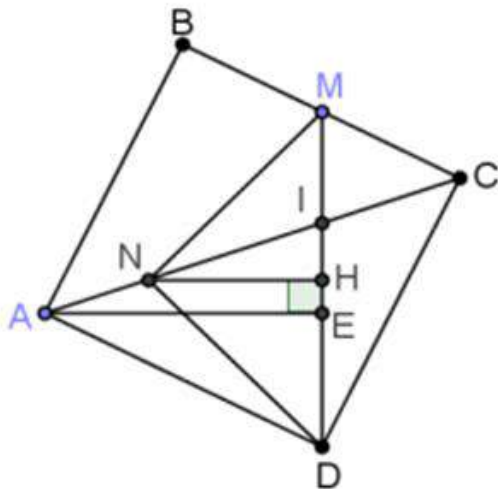
Ta có $EC=2R=2\sqrt{10} \Leftrightarrow (c-1)^2+(c+3)^2=40 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=-3 \Rightarrow C(-3;-4) \\ c=5 \Rightarrow C(5;4) \end{array}\right.$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{C(-3;-4)\ hay\ C(5;4)}$

Câu 128. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD, gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh AC sao cho AC = 4AN, điểm N thuộc đường thẳng 3x + y + 4 = 0. Phương trình đường thẳng MD: x – 1 = 0. Xác định tọa độ đỉnh A của hình vuông ABCD, biết khoảng cách từ A đến đường thẳng MD bằng 4 và điểm N có hoành độ âm.

(*Trích đề thi thử THPT Quỳnh Lưu 2, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Ta có: $\Delta IMC \sim \Delta IDA \Rightarrow \frac{IA}{IC}=\frac{ID}{IM}=\frac{DA}{MC}=2 \Rightarrow \frac{IN}{IA}=\frac{5}{8}$

Suy ra $d(N;MD)=\frac{5}{8}d(A;MD)=\frac{5}{2}$

* Giả sử N(n; 3n – 4). Từ $d(N;MD)=\frac{5}{2} \Leftrightarrow |n-1|=\frac{5}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n=\frac{7}{2}\ (ktm) \\ n=\frac{-3}{2}\ (tm) \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{N\left(\frac{-3}{2};\frac{1}{2}\right)}$

Lại do tam giác MND vuông cân tại N suy ra $DN=\sqrt{2}d(N;MD)=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Nên các điểm D và M là giao điểm của đường thẳng DM và đường tròn tâm N bán kinh $DN=\frac{5\sqrt{2}}{2}$, hay tọa độ các điểm đó là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-1=0 \\ \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=26 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} D(1;3),\ M(1;-2) \\ D(1;-2), M(1;3) \end{array}\right.$$

* TH1: $D(1;3),\ M(1;-2)$. Từ $\overrightarrow{DI}=2\overrightarrow{IM} \Rightarrow I\left(1;\frac{-1}{3}\right)$ và $\overrightarrow{IN}=\frac{5}{8}\overrightarrow{IA} \Rightarrow \boxed{A(-3;1)}$

* TH1: $D(1;-2), M(1;3)$. Từ $\overrightarrow{DI}=2\overrightarrow{IM} \Rightarrow I\left(1;\frac{4}{3}\right)$ và $\overrightarrow{IN}=\frac{5}{8}\overrightarrow{IA} \Rightarrow \boxed{A(-3;0)}$

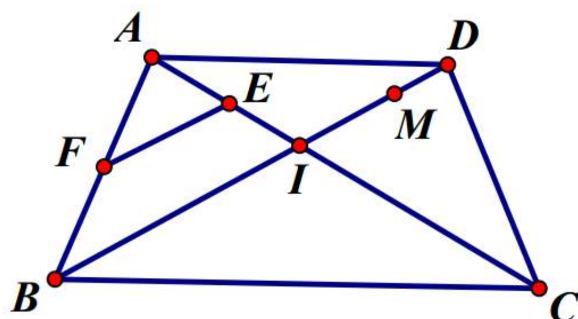
Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-3;1)\ hay\ A(-3;0)}$

Câu 129. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang cân ABCD (AD // BC) có phương trình đường thẳng AB: x – 2y + 3 = 0 va đường thẳng AC: y – 2 = 0. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang cân ABCD, biết $IB=IA\sqrt{2}$, hoành độ I lớn hơn – 3 và điểm $M(-1;3)$ thuộc

đường thẳng BD.

(*Trích đề thi thử THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Ta có A là giao điểm của AB và AC nên **A(1; 2).**

Lấy điểm E(0; 2) thuộc đường thẳng AC.

Gọi F(2a – 3; a) thuộc đường thẳng AB sao cho EF // BD

Khi đó: $\frac{EF}{BI}=\frac{AE}{AI}\Leftrightarrow\frac{EF}{AE}=\frac{BI}{AI}=\sqrt{2}\Rightarrow EF=AE\sqrt{2}$

Suy ra $(2a-3)^2+(a-2)^2=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\ a=\frac{11}{5}\end{array}\right.$

* Với $a=1\Rightarrow\overrightarrow{EF}=(-1;1)$ là vecto chỉ phương của đường thẳng BD. Nên chọn vecto pháp tuyến của BD là $\vec{n}=(1;-1)$, phương trình BD: x – y + 4 = 0.

Khi đó I là giao điểm của BD và AC nên tọa độ I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}y-2=0\\ x-y+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=2\end{cases}\Rightarrow\boxed{I(-2;2)}$$

Mặt khác B là giao điểm BD và AB nên tọa độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x-2y+3=0\\ x-y+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5\\ y=-1\end{cases}\Rightarrow\boxed{B(-5;-1)}$$

* Ta có: $\overrightarrow{IB}=\frac{-IB}{ID}\overrightarrow{ID}=-\sqrt{2}\overrightarrow{ID}\Rightarrow\boxed{D\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-2;\frac{3}{\sqrt{2}}+2\right)}$

Và $\overrightarrow{IA}=\frac{-IA}{IC}\overrightarrow{IC}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{ID}\Rightarrow\boxed{C\left(-3\sqrt{2}-2;2\right)}$

* Với $a=\frac{11}{5}\Rightarrow\overrightarrow{EF}=\left(\frac{7}{5};\frac{1}{5}\right)$ là vecto chỉ phương của đường thẳng BD. Nên chọn vecto pháp tuyến của BD là $\vec{n}=(1;-7)$, phương trình BD: x – 7y + 22 = 0.

Khi đó I là giao điểm của BD và AC nên tọa độ I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}y-2=0\\ x-7y+22=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-8\\ y=2\end{cases}\Rightarrow\boxed{I(-8;2)}\ (loai)$$

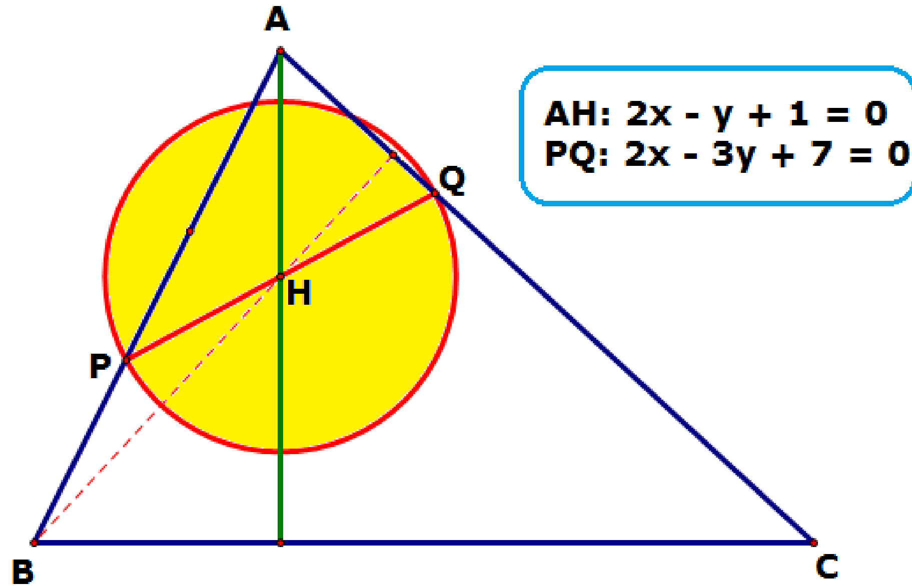
Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(1;2),\ B(-5;-1),\ C(-3\sqrt{2}-2;2),\ D\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-2;\frac{3}{\sqrt{2}}+2\right)}$

Câu 130. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có H là trực tâm, $C\left(3;\frac{3}{2}\right)$, đường thẳng AH có phương trình $2x-y+1=0$, đường thẳng d đi qua H, cắt đường thẳng AB, AC lần lượt tại P và Q (khác

điểm A) thỏa mãn HP = HQ và có phương trình $2x-3y+7=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A và B

(Trích đề thi thử lần 5, THPT Chuyên Đại Học Sư Phạm Hà Nội, năm 2015)

► **Hướng dẫn giải :**



* Qua C kẻ đường thẳng song song và cắt AB tại N, cắt AH tai K, do HP = HQ nên KC = KN.

Goi M là trung điểm của BC. Ta có KM // AB, suy ra KM vuông góc với CH nên M là trực tâm tam giác CHK. Như vậy xác định được K, M nên suy ra xác định được tọa độ A và B.

* Đường thẳng CK: 4y – 6y – 3 = 0.

Tọa độ điểm K là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}4x-6y-3=0\\2x-y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-9}{8}\\y=\dfrac{-5}{4}\end{cases}\Rightarrow\boxed{K\left(\dfrac{-9}{8};\dfrac{-5}{4}\right)}$$

Do K là trung điểm CN suy ra $N\left(\dfrac{-21}{4};-4\right)$. Tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x-3y+7=0\\2x-y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}\Rightarrow\boxed{H(1;3)}$$

* Đường thẳng qua H vuông góc d: 3x + 2y – 9 = 0

Đường thẳng qua C vuông góc với AH: x + 2y – 6 = 0.

Tọa độ M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}3x+2y-9=0\\x+2y-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\y=\dfrac{9}{4}\end{cases}\Rightarrow\boxed{M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{4}\right)}$$ suy ra **B(0; 3)**

* Đường thẳng BN: 4x – 3y + 9 = 0. Tọa độ A là nghiệm của hê:

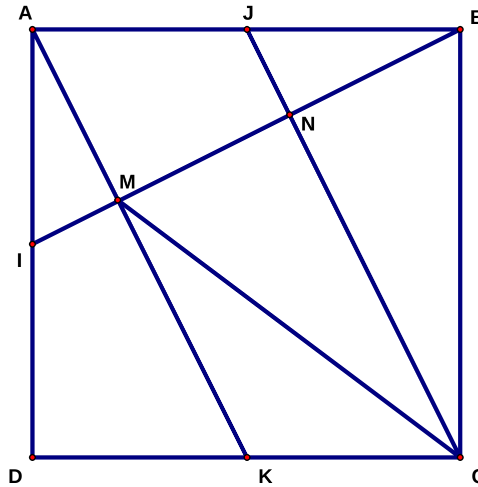
$$\begin{cases}2x-y+1=0\\4x-3y+9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=7\end{cases}\Rightarrow\boxed{A(3;7)}$$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(3;7),\ B(0;3)}$

Câu 131. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có C(2; -2). Gọi điểm I, K lần lượt là trung điểm của DA và DC; M(-1; -1) là giao của BI và AK. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông ABCD biết điểm B có hoành độ dương.

(Trích đề thi thử lần 2, THPT Hiền Đa, Phú Thọ, năm 2015)

▶ **Hướng dẫn giải :**



* Gọi J là trung điểm của AB. khi đó AJCK là hình bình hành ⇒ AK // CJ.

Gọi CJ ∩BM = N ⇒ N là trung điểm của BM.

Chứng minh được AK ⊥ BI từ đó suy ra tam giác BMC là tam giác cân tại C.

* Ta có $\overrightarrow{MC}(3;-1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{MC}\right| = \sqrt{10}$ ⇒ CM = BM = AB = $\sqrt{10}$

* Trong tam giác vuông ABM có

$$AB^2 = BM.BI = BM.\sqrt{AB^2 + AI^2} = BM.AB\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow BM = 2\sqrt{2}$$

⇒ B là giao của hai đường tròn (C; $\sqrt{10}$) và (M; $2\sqrt{2}$).

Tọa độ điểm B thỏa mãn: $\begin{cases}(x-2)^2 + (y+2)^2 = 10 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = 8\end{cases}$ ⇒B(1; 1).

* Phương trình đường thẳng AB có dạng: x - 3y + 2 = 0.

Phương trình đường thẳng AM có dạng: x + y + 2 = 0.

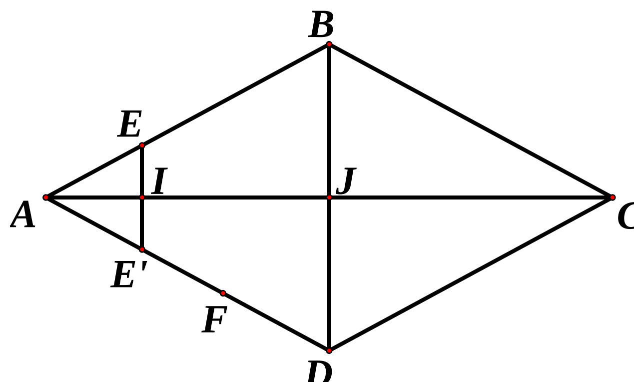
⇒ A (-2; 0). Ta có $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow D(-1;-3)$.

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-2;0),\ B(1;1),\ D(-1;-3)}$

Câu 132. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi *ABCD* có đường chéo *AC* nằm trên đường thẳng $d: x+y-1=0$. Điểm $E(9;4)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh *AB*, điểm $F(-2;-5)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh *AD*, $AC = 2\sqrt{2}$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình thoi *ABCD* biết điểm *C* có hoành độ âm.

(*Trích đề thi thử lần 2, THPT Yên Phong 2, Bắc Ninh, năm 2015*)

▶ **Hướng dẫn giải :**



* Gọi *E'* là điểm đối xứng với *E* qua *AC*, do *AC* là phân giác của góc BAD nên *E'* thuộc *AD*. *EE'* vuông góc với *AC* và qua điểm $E(9;4)$ nên có phương trình $x-y-5=0$.

Gọi *I* là giao của *AC* và *EE'*, tọa độ *I* là nghiệm hệ $\begin{cases} x-y-5=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow I(3;\ 2)$

Vì *I* là trung điểm của *EE'* nên $E'(-3;-8)$

* Đường thẳng *AD* qua $E'(-3;-8)$ và $F(-2;-5)$ có VTCP là $\overline{E'F}=(1;3)$ nên phương trình là:

$$3(x+3)-(y+8)=0 \Leftrightarrow 3x-y+1=0.$$ Điểm $A=AC\cap AD \Rightarrow A(0;1)$.

* Giả sử $C(c;1-c)$. Theo bài ra $AC=2\sqrt{2} \Leftrightarrow c^2=4 \Leftrightarrow c=2; c=-2$.

Do hoành độ điểm C âm nên $C(-2;3)$

* Gọi J là trung điểm *AC* suy ra $J(-1;2)$, đường thẳng BD qua J và vuông góc với AC có phương trình

$x-y+3=0$. Do $D=AD\cap BD \Rightarrow D(1;4) \Rightarrow B(-3;0)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(0;1),\ B(-3;0),\ C(-2;3),\ D(1;4).}$

Câu 133. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có đỉnh A(2; 2). Biết điểm M(6;3) thuộc cạnh BC, điểm N(4; 6) thuộc cạnh CD. Tìm tọa độ đỉnh C.

(*Trích đề thi thử lần 1, THPT Quảng Xương 1, Thanh Hóa, năm 2015*)

► Hướng dẫn giải cách 1:

* Gọi $I\left(5;\dfrac{9}{2}\right)$ là trung điểm của MN. Do góc $\angle MCN=90^0$ nên C thuộc đường tròn tâm I đường kinh MN. Vì CA là phân giác của góc $\angle MCN$ nên CA giao với đường tròn tại điểm E là điểm chính giữa của cung MN (không chứa C) A và E nằm cùng phía so với MN.

Suy ra E là giao điểm của đường tròn (I) và trung trực của MN.

* Phương trình đường tròn: $(I):(x-5)^2+\left(y-\dfrac{9}{2}\right)^2=\dfrac{13}{4}$

Phương trình đường trung trực của MN: 4x – 6y + 7 = 0.

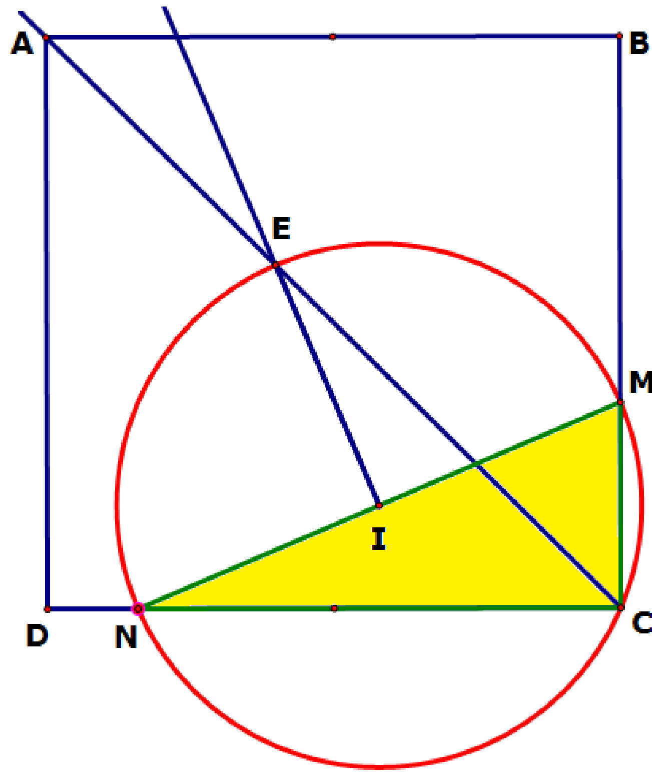
* Ta có tọa độ điểm E là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 4x-6y+7=0 \\ (x-5)^2+\left(y-\dfrac{9}{2}\right)^2=\dfrac{13}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{13}{2} \\ y=\dfrac{11}{2} \end{cases} hay \begin{cases} x=\dfrac{7}{2} \\ y=\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Do A, E cùng phía so với MN nên ta nhận $\boxed{E\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{7}{2}\right)}$

* Phương trình AE: x – y = 0. Do C là giao điểm thứ hai của (I) và AR nên tọa độ **C(6; 6)**

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{C(6;6)}$



▶ **Hướng dẫn giải cách 2:**

* Gọi vecto pháp tuyến của BC là $\vec{n}=(a;b),\ (a^2+b^2>0)$ suy ra **BC: ax + by – 6a – 3b = 0**

CD đi qua N(4; 6) và vuông góc với BC suy ra phương trình **CD: bx – ay + 6a – 4b = 0**

* Ta có: $d(A;BC)=d(A;CD)\Leftrightarrow \dfrac{|4a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|4a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=8a \end{array}\right.$

* **TH1: b = 0**, ta chọn a = 1. Khi đó BC: x – 6 = 0, CD: y – 6 = 0.

Suy ra C(6; 6), phương trình MN: 3x + 2y – 24 = 0. Kiểm tra A và C khác phía đối với MN nên ta nhận C(6; 6)

* **TH2: b = 8a,** ta chọn a = 1 suy ra b = 8. Kh đó BC: x + 8y – 30 = 0, CD: 8x – y – 26 = 0.

Suy ra $C\left(\dfrac{238}{65};\dfrac{214}{65}\right)$, loại do A và C cùng phía đối với MN.

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{C(6;6)}$

Câu 134. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2=2x$, tam giác ABC vuông tai A có AC là tiếp tuyến của (C) trong đó A là tiếp điểm, chân đường cao kẻ từ A là H(2; 0). Tìm tọa độ đỉnh B của tam giác ABC biết B có tung độ dương và diện tích tam giác ABC bằng $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

(Trích đề thi thử số 1, Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ, năm 2014)

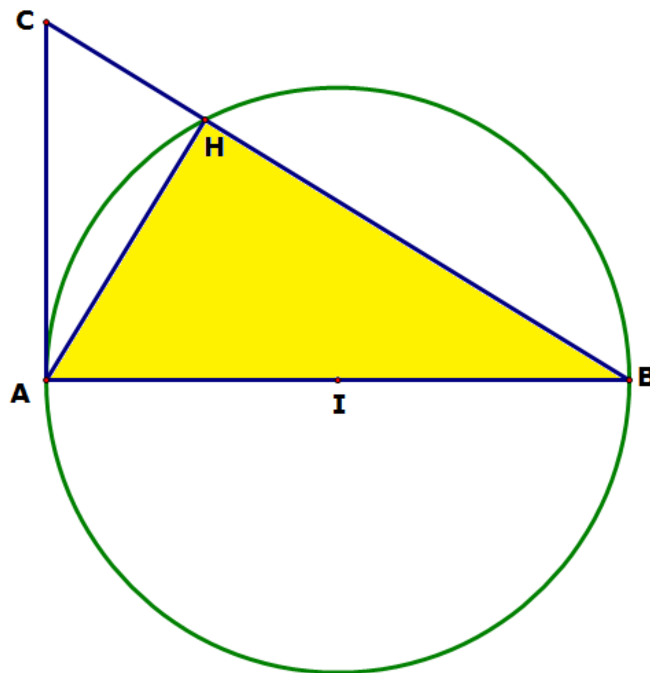
▶ **Hướng dẫn giải :**

* Do tam giác ABC vuông tại A có H thuộc (C) và AC tiếp tuyến của (C) nên ta có:

B thuộc đường tròn đường kinh AB, $AC=\dfrac{2S_{ABC}}{AB}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow BH=\dfrac{AB^2}{\sqrt{AB^2+AC^2}}=\sqrt{3}$

* Giả sử B(a; b) có b > 0.

Khi đó: $\begin{cases} BI=1 \\ BH=\sqrt{3} \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+b^2=1 \\ (a-2)^2+b^2=3 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}\Rightarrow \boxed{B\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

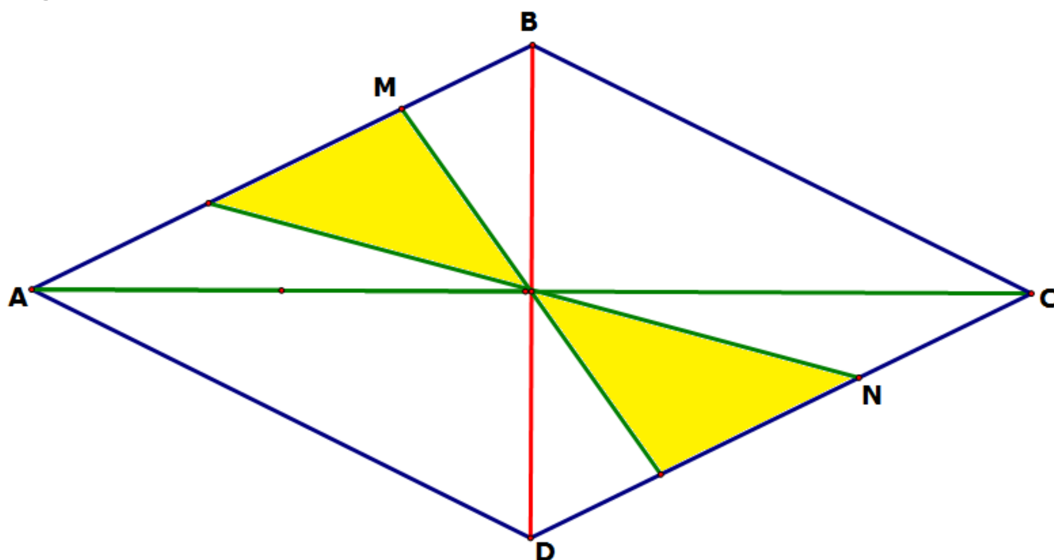


Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

Câu 135. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có tâm I(2; 1) và AC = 2BD. Điểm $M\left(0;\frac{1}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB, $N(0;7)$ thuộc đường thẳng CD. Tìm tọa độ điểm P biết $\overrightarrow{BP}=5\overrightarrow{BI}$ với B có tung độ dương.

(*Trích đề thi thử số 2, Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ, năm 2014*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Phương trình đường thẳng AB qua M có dạng $ax+b\left(y-\frac{1}{3}\right)=0,\ (a^2+b^2>0)$

Suy ra phương trình đường thẳng CD qua N và song song AB là: ax + b(y – 7) = 0

* Do đường thẳng AB và CD đối xứng nhau qua tâm I, nên ta có:

$$\begin{cases} d(I;AB)=d(I;CD) \\ I\ nam\ giua\ AB\ va\ CD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|2a+\frac{2b}{3}\right|=|2a-6b| \\ \left(2a+\frac{2b}{3}\right)(2a-6b)<0 \end{cases} \Leftrightarrow 3a=4b$$

Ta chọn a = 4 nên b = 3. Khi đó AB: 4x + 3y – 1 = 0

* Do ABCD là hình thoi nên AC vuông BD.

Ta có: $\tan\angle ABI = \dfrac{AI}{BI} = \dfrac{AC}{BD} = 2 \Rightarrow \cos(AB;BD) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Phương trình BD qua I có dạng: $m(x-2)+n(y-1)=0\ (m^2+n^2>0)$

Do đó cos(AB;BD) = $\dfrac{|4m+3n|}{5\sqrt{m^2+n^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 11m^2+24m+4n^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2n \\ 11m=-2n \end{array}\right.$

* Với m = - 2n ta chọn n = 1, m = -2

Với 11m = -2n ta chọn n = 11, m = - 2

Khi đó phương trình BD tương ứng là 2x – y – 3 = 0 hay 2x – 11y + 7 = 0.

Do B có tung độ dương và B cũng là giao điểm của AB và BD nên $B\left(\dfrac{-1}{5};\dfrac{3}{5}\right)$

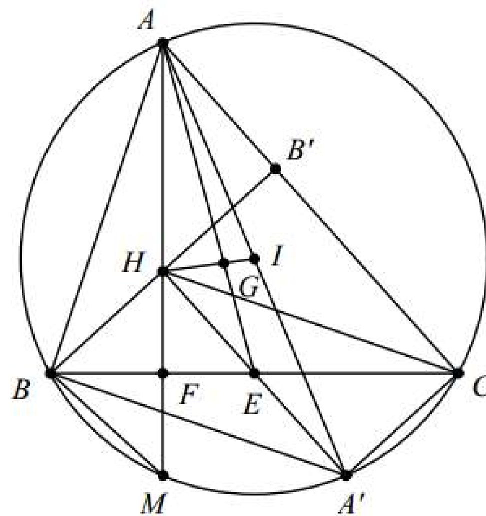
Theo giả thiết $\overrightarrow{BP} = 5\overrightarrow{BI} \Rightarrow \boxed{P\left(\dfrac{54}{5};\dfrac{13}{5}\right)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{P\left(\dfrac{54}{5};\dfrac{13}{5}\right)}$

Câu 136. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) có phương trình là $(C):(x-2)^2+(y-3)^2=26$, $G\left(1;\dfrac{8}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác và $M(7;2)$ nằm trên đường thẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC, M khác A. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết tung độ của điểm B lớn tung độ của điểm C.

(Trích đề thi thử số 3, Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ, năm 2014)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi I là tâm của đường tròn (C), E là trung điểm BC và H là trực tâm tam giác ABC.

Kẻ đường kính AA' của đường tròn (C).

Ta có: BA' // CH, CA' // BH nên BHCA' là hình bình hành.

Suy ra E là trung điểm A'H do đó IE là đường trung bình của tam giác H'AA

Nên $\dfrac{IE}{AH} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{EG}{GA}$

* Do đó, ta có: $\Delta GIE \sim \Delta GHA \Rightarrow \angle AGH = \angle EGI \Rightarrow G,H,I$ thẳng hằng nên $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GI}$

Mà I(2; 3) nên ta có: $\begin{cases} x_H - 1 = -2(2-1) \\ y_H - \frac{8}{3} = -2\left(3 - \frac{8}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_H = -1 \\ y_H = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{H(-1;2)}$

* Mặt khác M thuộc (C) và A, H, M thẳng hàng.

Lại có $\angle BHM = \angle AHB' = \angle ACF = \angle BMH \Rightarrow \Delta MBH$ cân tại B nên BC là đường trung trực cua đoạn HM. Ta có F(3; 2) và $\overrightarrow{HM} = (8;0) = 8(1;0)$ nên phương trình BC: x – 3 = 0.

* Tọa độ B, C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - 3 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} hay \begin{cases} x = 3 \\ y = 8 \end{cases}$

Do B có tung độ lớn của C nên ta nhận **B(3; 8), C(3; -2)**

Phương trình HM: y – 2 = 0 nên tọa độ A là nghiệm của hệ:

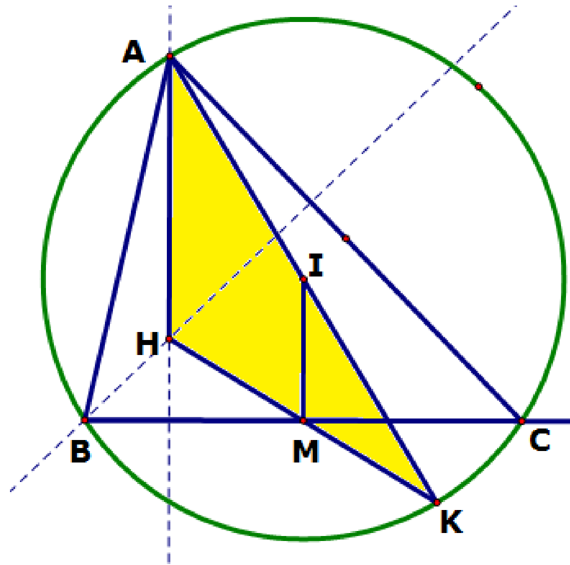
$$\begin{cases} y - 2 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-3;2)}$$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-3;2),\ B(3;8),\ C(3;-2)}$

Câu 137. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kinh $\sqrt{17}$ và đường thẳng BC có phương trình $3x - 5y - 30 = 0$. Biết trực tâm H của tam giác thuộc đương thẳng $d: 5x - 3y - 24 = 0$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM}$ với M là trung điểm đoạn BC và tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

(*Trích đề thi thử lần 3, Website: ViettelStudy.vn , năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Kẻ đường kinh AA' của đường tròn (I) suy ra IM là đường trung bình của tam giác HAA'

Suy ra AH = 2IM nên $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM}$

* Tọa độ B, C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x - 5y - 2 = 0 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -6 \end{cases} hay \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$

Suy ra B(0; -6), C(5; -3) hay C(0; -6), B(5; -3).

* Trung điểm M của BC có tọa độ $M\left(\frac{5}{2};\frac{-9}{2}\right)$. Trực tâm H của tam giác thuộc đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép tịnh tiến $T_{2\overrightarrow{IM}=(3;-5)}$.

Từ biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến suy ra phương trình đường tròn (C') có tâm I(4;-7) là:

$$(C'): (x-4)^2 + (y+7)^2 = 17$$

* Vậy H là giao điểm của đường tròn (C') và đường thẳng có phương trình 5x – 3y – 24 = 0.

Nên tọa độ H thỏa hệ: $\begin{cases} 5x-3y-24=0 \\ (x-4)^2+(y+7)^2=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases} hay \begin{cases} x=0 \\ y=8 \end{cases}$

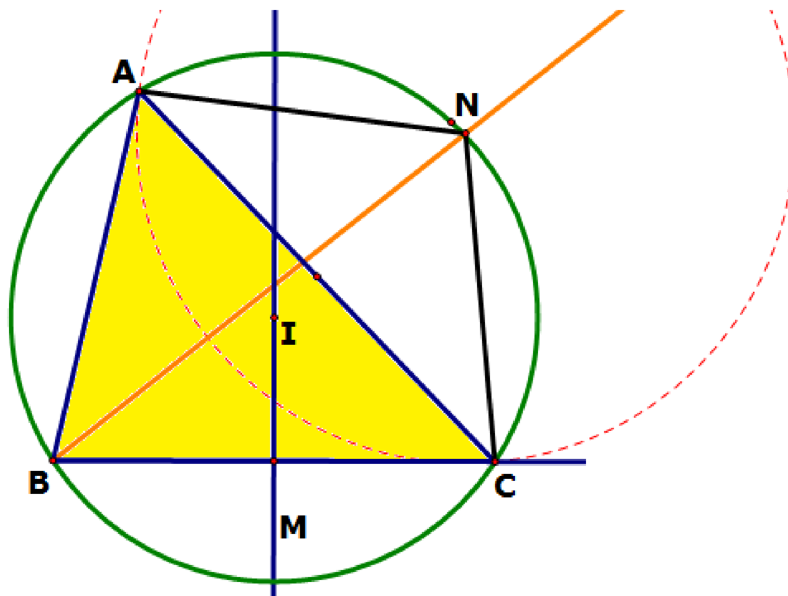
Suy ra A(0; 2), A(-3; -3).

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{\left[\begin{array}{l} A(0;2),\ B(0;-6),\ C(5;-3)\ hay\ A(-3;-3),\ B(0;-6),\ C(5;-3) \\ A(0;2),\ C(0;-6),\ B(5;-3)\ hay\ A(-3;-3),\ C(0;-6),\ B(5;-3) \end{array}\right.}$

Câu 138. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC (AB < AC) có $I(-1;0)$ tâm đường tròn ngoại tiếp. $M(3;3)$ là một điểm nằm trên đường trung trực của cạnh BC. $N(2;4)$ là điểm nằm trên đường thẳng chứa đường phân giác trong góc B của tam giác ABC và thỏa mãn AN = CN. Đường thẳng BC đi qua $D(1;4)$ và tung độ điểm B lớn hơn tung độ điểm C. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

(*Trích đề thi thử lần 5, Website: ViettelStudy.vn , năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Ta có $\overrightarrow{IM}=(4;3),\ \overrightarrow{IN}=(3;4) \Rightarrow IN=5$

Từ giả thiết suy ra IM, IN lần lượt là đường trung trực của BC, AC.

Đường thẳng BC đi qua **D(1; 4)** nhận $\overrightarrow{IM}$ làm vecto pháp tuyến nên ta có phương trình:

$$\boxed{BC: 4x+3y-16=0}$$

* Gọi N_0 là điểm chính giữa cung nhỏ AC suy ra N_0 thuộc đường trung trực cạnh AC và N_0 thuộc đường phân giác trong của góc ABC suy ra N_0 trùng với N.

Suy ra N thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm I(-1; 0) và bán kinh IN = 5 nên có phương trình:

$(x+1)^2+y^2=25$. Tọa độ B, C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+3y-16=0 \\ (x+1)^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases} hay \begin{cases} x=\frac{2}{5} \\ y=\frac{24}{5} \end{cases}$$

Vì tung độ B lớn hơn tung độ C nên ta nhận $B\left(\frac{2}{5};\frac{24}{5}\right),\ C(4;0)$

* Đường thẳng AC đi qua C nhận $\overrightarrow{IN}$ làm vecto pháp tuyến nên có phương trình:

$AC: 3x+4y-12=0$. Toa độ A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x+4y-12=0 \\ (x+1)^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases} hay \begin{cases} x=\dfrac{-12}{5} \\ y=\dfrac{24}{5} \end{cases}$$

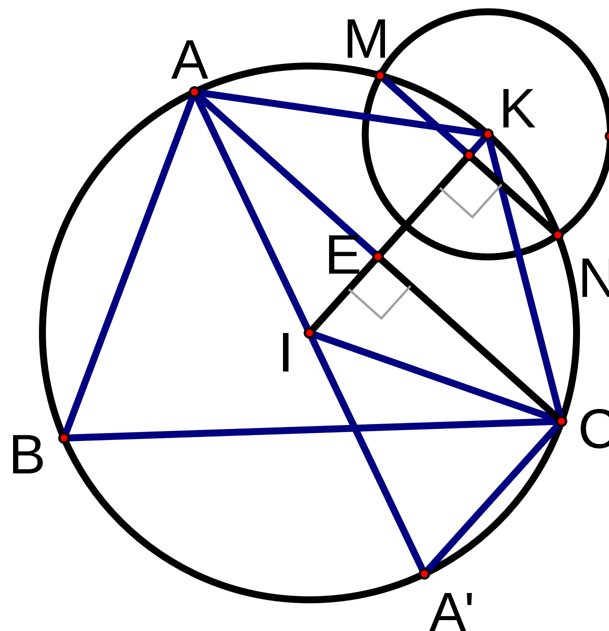
* Vì A khác C nên $A\left(\dfrac{-12}{5};\dfrac{24}{5}\right)$, thử lại thỏa mãn điều kiện AB < AC.

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A\left(\dfrac{-12}{5};\dfrac{24}{5}\right), B\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{24}{5}\right), C(4;0)}$

Câu 139. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $(C_1):(x-2)^2+(y-3)^2=45$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đường tròn (C_2) có tâm $K(-1;-3)$ cắt đường tròn (C_1) theo một dây cung song song với AC. Biết diện tích tứ giác AICK bằng $30\sqrt{2}$, chu vi tam giác ABC bằng $10\sqrt{10}$, trong đó I là tâm đường tròn (C_1). Tìm tọa độ điểm B, biết B có hoành độ âm.

(***Trích đề thi thử THPT Tiểu La, Quảng Nam, năm 2015***)

► **Hướng dẫn giải :**



* (C_1) Có tâm $I(2;3), R_1=IK=3\sqrt{5}$. Nhận xét $K(-1;-3)\in(C_1)$

Gọi $MN=(C_1)\cap(C_2)\Rightarrow MN\perp IK$. Mà $AC//MN\Rightarrow AC\perp IK$

* Do đó: $S_{AICK}=\dfrac{IK.AC}{2}=30\sqrt{2}\Rightarrow AC=4\sqrt{10}$

Lại có: $AB+BC+CH=10\sqrt{10}\Rightarrow BA+BC=6\sqrt{10}(1)$

* Kẻ AA′ là đường kính của (C_1); gọi $E=IK\cap AC$

$\Rightarrow IE=\dfrac{1}{2}A'C=\dfrac{1}{2}\sqrt{AA'^2-AC^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(6\sqrt{5})^2-(4\sqrt{10})^2}=\sqrt{5}$

$\Rightarrow \overrightarrow{IK}=3\overrightarrow{IE}\Rightarrow E(1;1)$

* AC qua $E(1;1)$, AC ⊥ IK ⇒ pt AC: $x+2y-3=0$. Như vậy: A,C là giao điểm của AC và (C_1)

$\Rightarrow A(1-4\sqrt{2};1+2\sqrt{2}), C(1+4\sqrt{2};1-2\sqrt{2})$

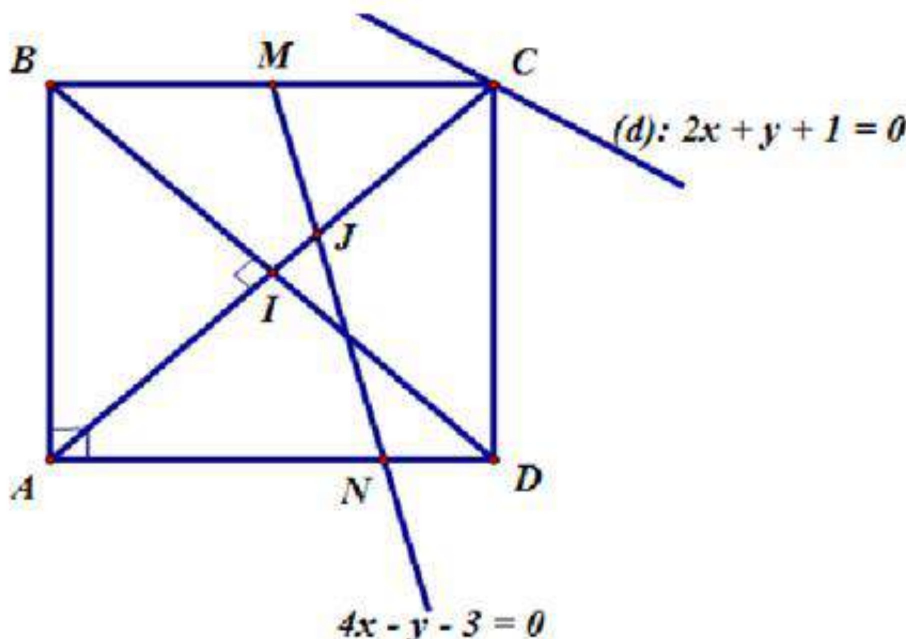
Giải hệ gồm (1) và (C_1), ta có: $B\left(\frac{7}{2}-3\sqrt{3};\frac{12+3\sqrt{3}}{2}\right)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B\left(\frac{7}{2}-3\sqrt{3};\frac{12+3\sqrt{3}}{2}\right)}$

Câu 140. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có đỉnh $A(3;-3)$, đỉnh C nằm trên đường thẳng $d: 2x+y+1=0$. Gọi M là trung điểm cạnh BC, N là điểm thuộc cạnh AD sao cho AD = 4ND. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông ABCD, biết đường thẳng MN có phương trình $4x-y-3=0$

(*Trích đề thi thử lần 5, THPT Lê Xoay, Vĩnh Phúc, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi I là giao điểm AC và BD, J là giao điểm của AC và MN. Khi đó J thuộc đoạn AC.

Ta có hai tam giác MCJ, NAJ đồng dạng (g – g).

Suy ra $\frac{CJ}{AJ}=\frac{MC}{AN}=\frac{2}{3}\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}\ (1)}$

* Đặt $C(t;-2t-1)\in d,\ J(x;y)\Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AJ}=(x-3;y+3)\\ \overrightarrow{AC}=(t-3;2-2t)\end{cases}$

Có: $(1)\Leftrightarrow \begin{cases}x-3=\frac{3}{5}(t-3)\\ y+3=\frac{3}{5}(2-2t)\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{6+3t}{5}\\ y=-\frac{9+6t}{5}\end{cases}\Rightarrow \boxed{J\left(\frac{6+3t}{5};-\frac{9+6t}{5}\right)}$

Do J thuộc MN suy ra $4\left(\frac{6+3t}{5}\right)+\frac{9+6t}{5}-3=0\Leftrightarrow t=-1\Leftrightarrow \boxed{C(-1;1)}$

* BD qua I(1; -1) vuông góc AC nên có phương trình **BD: x – y – 2 = 0**

Đặt B(b; b – 2). Khi đó IB = IC $\Leftrightarrow (b-1)^2+(b-1)^2=8\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=3\\ b=-1\end{array}\right.$

* Với b = -1 suy ra B(-1; -3) cùn phía với C so với MN (không thỏa mãn)

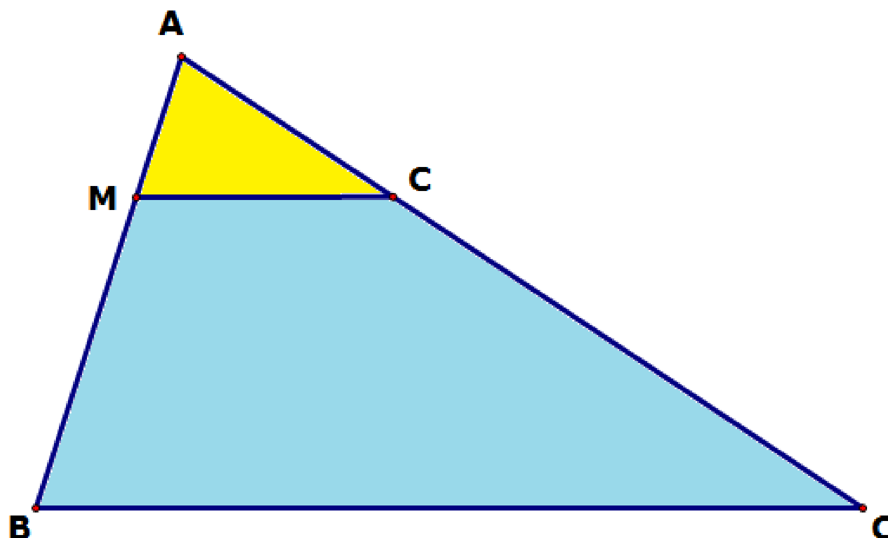
Với t = 3 suy ra B(3; 1) khác phía với C so với MN (thỏa mãn) suy ra **D(-1;-3)**

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B(3;1),\ C(-1;1),\ D(-1;-3)}$

Câu 141. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $3\sqrt{5}$. Điểm M(1;3) được xác định: $\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MA}$, điểm N(3; -1) thuộc đường thẳng AC sao cho MN song song BC. Đỉnh B thuộc đường thẳng d có phương trình x + y = 0 và hoành độ điểm B lớn hơn – 4. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

(*Trích đề thi thử lần 2, THPT Đông Anh, Hà Nội, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Ta có: MN = $2\sqrt{5}$. BC song song MN, M thuộc đoạn AB sao cho AB = 3AM

Ta có BC = 3MN suy ra $BC = 6\sqrt{5}$

* Lại có: $\dfrac{\text{BC}}{\text{sinA}} = 2R \Leftrightarrow \dfrac{6\sqrt{5}}{\sin A} = 6\sqrt{5} \Rightarrow \sin A = 1 \Rightarrow A = 90^o$

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường tròn đường kính BC.

* Ta có: B $\in$d: x + y = 0 $\Rightarrow$ B(t;-t) (t $\in$ R, t > - 4)

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} x_A = \dfrac{1-\frac{1}{3}t}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{3-t}{2} \\ y_A = \dfrac{3+\frac{1}{3}t}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{9+t}{2} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{3-t}{2};\frac{9+t}{2}\right)$$

* $AM \perp AN \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = 0$ với $\overrightarrow{AM}\left(\dfrac{t-1}{2};\dfrac{-t-3}{2}\right), \overrightarrow{AN}\left(\dfrac{t+3}{2};\dfrac{-t-11}{2}\right)$

Do đó: $\left(\dfrac{t-1}{2}\right).\left(\dfrac{t+3}{2}\right) + \left(\dfrac{-t-3}{2}\right).\left(\dfrac{-t-11}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t = -5(Loai) \end{array}\right.$

Với t = - 3 ta có B(-3;3), A(3;3) ; $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AN} \Rightarrow C(3;-9)$

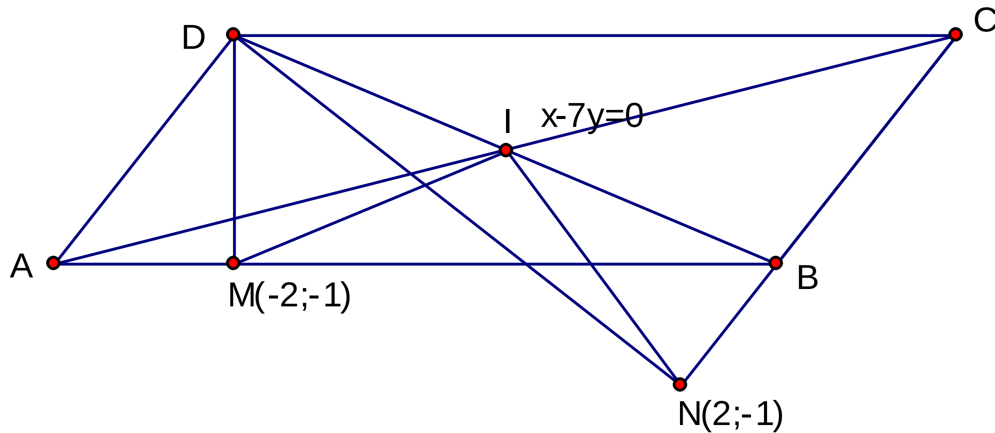
Đường tròn đường kính BC có tâm I(0;-3), bán kính $3\sqrt{5}$ có pt là $x^2 + (y-9)^2 = 45$

Vậy phương trình đường tròn thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{(C): x^2 + (y-9)^2 = 45}$

Câu 142. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có $BD = \dfrac{\sqrt{10}}{5}AC$. Biết rằng $M(-2;-1)$, $N(2;-1)$ lần lượt là hình chiếu của D xuống các đường thẳng AB, BC và đường thẳng $x - 7y = 0$ đi qua A, C. Tìm tọa độ điểm A, C.

(*Trích đề thi thử lần 3, THPT Chí Linh, Hải Dương, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi I là giao điểm của AC và BD $\Rightarrow$ I(7y;y)

Do tam giác BDM và BDN vuông tại M, N nên

$$IM = IN = \frac{DB}{2} \Leftrightarrow \sqrt{(7y-2)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(7y+2)^2+(y+1)^2} \Leftrightarrow y=0 \Rightarrow I(0;0)$$

* Khi đó BD = 2IM $= 2\sqrt{5} \Rightarrow AC = \frac{5}{\sqrt{10}}BD = 5\sqrt{2} \Rightarrow IA = IC = \frac{AC}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

* Tọa độ A, C thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} x-7y=0 \\ x^2+y^2=\frac{25}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-\frac{7}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy tọa độ 2 điểm $A(-\frac{7}{2};-\frac{1}{2}), C(\frac{7}{2};\frac{1}{2})$ hoặc $A(\frac{7}{2};\frac{1}{2}), C(-\frac{7}{2};-\frac{1}{2})$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A\left(-\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right), C\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right) \text{ hay } C\left(-\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right), A\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)}$

Câu 143. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác nhọn ABC, gọi E, F lần lượt là hình chiếu của các đỉnh B, C lên các cạnh AC, AB. Các đường thẳng BC và EF lần lượt có phương trình là $BC: x-4y-12=0$ và $EF: 8x+49y-6=0$, trung điểm I của EF nằm trên đường thẳng $\Delta: x-12y=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $BC = 2\sqrt{17}$ và đỉnh B có hoành độ âm.

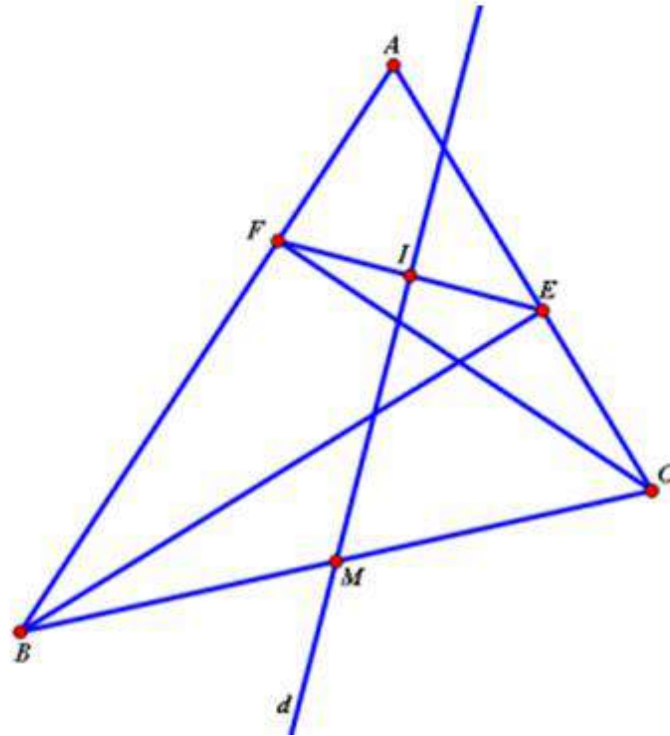
(*Trích đề thi thử lần 3, THPT Hai Bà Trưng, Huế, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**

* Vì I thuộc Δ nên I(12m; m) mà I thuộc EF nên ta có $m = \frac{6}{145} \Rightarrow I\left(\frac{72}{145};\frac{6}{145}\right)$

Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc EF nên **d: 49x – 8y – 24 = 0**

Đường thẳng d cắt BC tại trung điểm M của BC, do vậy M(0; -3).



* Ta có: $B(4b+12;b)$, $BM=\sqrt{(4b+12)^2+(b+3)^2}=\sqrt{17}$ nên ta có phương trình:

$$(4b+12)^2+(b+3)^2=17 \Leftrightarrow 17b^2+102b+136=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-2 \\ b=-4 \end{array}\right.$$

Ta chọn B(-4; -4) suy ra C(4; -2).

* Lấy $E\left(e;\dfrac{6-8e}{49}\right)$. Ta có: $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{EC}=0$.

Do vậy $E\left(\dfrac{16}{5};\dfrac{-2}{5}\right)$, $F\left(\dfrac{-64}{29};\dfrac{14}{29}\right)$ *hay* $F\left(\dfrac{16}{5};\dfrac{-2}{5}\right)$, $E\left(\dfrac{-64}{29};\dfrac{14}{29}\right)$

* Với $E\left(\dfrac{16}{5};\dfrac{-2}{5}\right)$, $F\left(\dfrac{-64}{29};\dfrac{14}{29}\right)$. Ta có BE: x – 2y – 4 = 0, CF: 2x + 5y + 2 = 0.

Suy ra $A\left(\dfrac{16}{9};\dfrac{-10}{9}\right)$ (loại vì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}<0 \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})<0 \Rightarrow \angle A>90^0$

* Với $F\left(\dfrac{16}{5};\dfrac{-2}{5}\right)$, $E\left(\dfrac{-64}{29};\dfrac{14}{29}\right)$. Ta có BE: 5x – 2y + 12 = 0, CF: 2x + y – 6 = 0.

Suy ra $A(0;6)$. (thỏa mãn)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(0;6),\ B(-4;4),\ C(4;-2)}$

Câu 144. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B, có $BC=2AD$, đỉnh $A(-3;1)$ và trung điểm M của đoạn BC nằm trên đường thẳng $d: x-4y-3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình thang $ABCD$, biết $H(6;-2)$ là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng CD.

(Trích đề thi thử THPT Quang Trung, Cần Thơ, năm 2015)

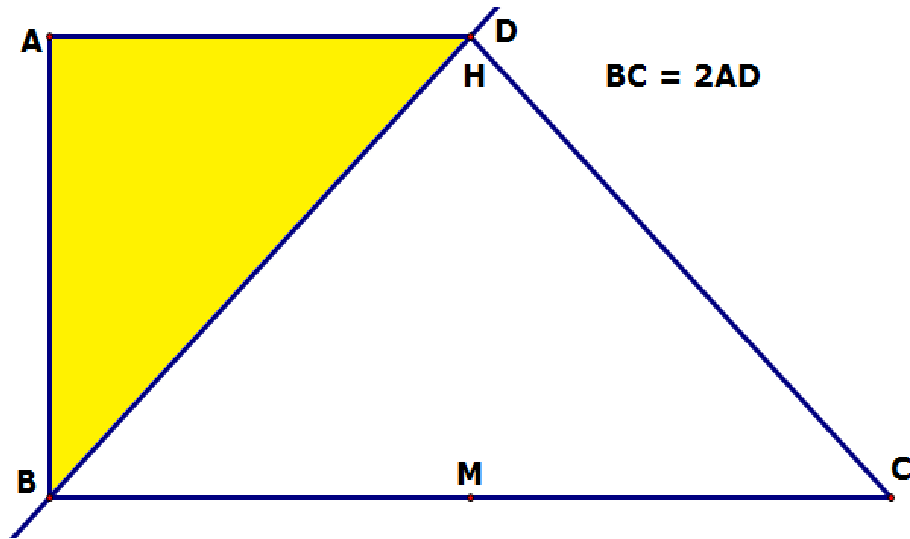
► **Hướng dẫn giải :**

* Từ giả thiết ta có $ABMD$ là hình chữ nhật. Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp $ABMD$.

$BH\perp DH \Rightarrow H\in(C) \Rightarrow HA\perp HM$ (*)

$M\in d: x-4y-3=0 \Rightarrow M(4m+3\,;\,m)$ và $\overrightarrow{AH}=(9;-3)$, $\overrightarrow{HM}=(4m-3\,;\,m+2)$

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HM}=0 \Leftrightarrow 9(4m-3)-3(m+2)=0 \Leftrightarrow m=1$ suy ra: $M(7;1)$.



* $ADCM$ là hình bình hành $\Rightarrow$ DC đi qua $H(6;-2)$ và có một vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AM}=(10;0)$

$\Rightarrow$ Phương trình $DC: y+2=0$.

* $D\in DC: y+2=0 \Rightarrow D(t;-2)$, $\overrightarrow{AD}=(t+3;-3)$, $\overrightarrow{MD}=(t-7;-3)$

$$AD\perp DM \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{MD}=0 \Leftrightarrow (t+3)(t-7)+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2\Rightarrow D(-2;-2) \\ t=6\Rightarrow D(6;-2)\equiv H\ (ktm)\end{array}\right.$$

* Gọi $I=AM\cap BD$ $\Rightarrow$ I là trung điểm AM $\Rightarrow$ $I(2;1)$

I là trung điểm $BD\Rightarrow$ $B(6;4)$.

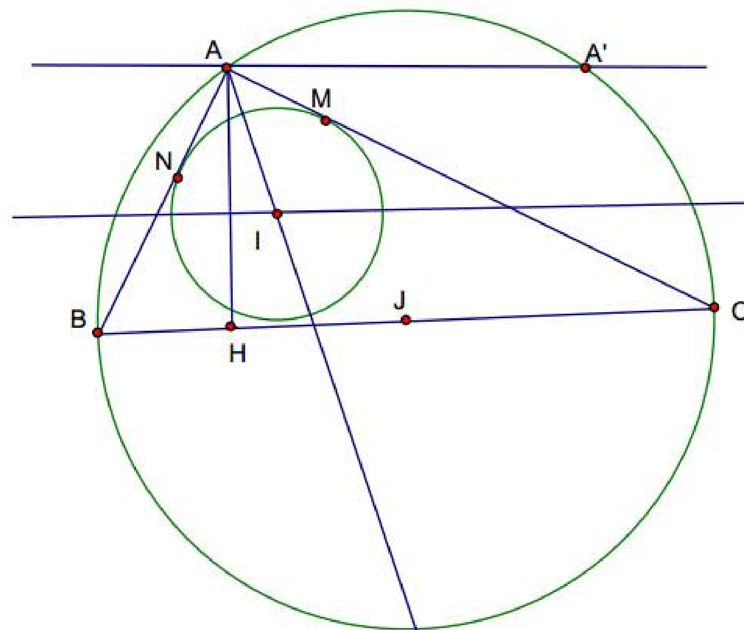
M là trung điểm $BC\Rightarrow$ $C(8;-2)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B(6;4),\ C(8;-2),\ D(-2;-2)}$

Câu 145. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, có $B(-2;1)$ và $C(8;1)$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính $r=3\sqrt{5}-5$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC, biết tung độ điểm I là số dương.

(*Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Quảng Nam, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC. Ta có BC = 10

Gọi M, N lần lượt là các tiếp điểm trên AB và AC.

Ta có p = BC + AM = BC + r = $10+3\sqrt{5}-5=5+3\sqrt{5} \Rightarrow S = pr = 20$

* Gọi AH = h ta có : $S=\frac{1}{2}BC.h=20 \Rightarrow h=4$.

Do $r=3\sqrt{5}-5$ nên tâm I nằm trên các đường thẳng song song BC, cách BC một khoảng bằng r, mà tung độ I dương nên I nằm trên đường thẳng $y=3\sqrt{5}-4$ và điểm A nằm trên y = 5.

* Gọi J là trung điểm BC suy ra J(3; 1) và BC = 2JA nên **A(0; 5) hay A'(6;5).**

Ta xét A(0; 5) và có phương trình AB: 2x – y + 5 = 0 và AC: x + 2y – 10 = 0.

Phương trình đường phân giác trong AI: 3x + y – 5 = 0.

I là giao điểm của phân giác AI và đường $y=3\sqrt{5}-4$ nên tọa độ $I(3-\sqrt{5};3\sqrt{5}-4)$

* Tương tự với A'(6;5) ta cũng có: $I(-3+\sqrt{5};3\sqrt{5}-4)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{I(3-\sqrt{5};3\sqrt{5}-4) \text{ hay } I(-3+\sqrt{5};3\sqrt{5}-4)}$

Câu 146. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường phân giác trong góc A là $x+y-3=0$. Hình chiếu của tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC lên AC là $E(1;4)$. BC có hệ số góc âm và tạo với đường thẳng AC góc 45^0. Đường thẳng AB tiếp xúc với $(C):(x+2)^2+y^2=5$. Tìm phương trình các cạnh của tam giác ABC.

(*Trích đề thi thử lần 3, THPT Lương Thế Vinh, Hà Nội, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**

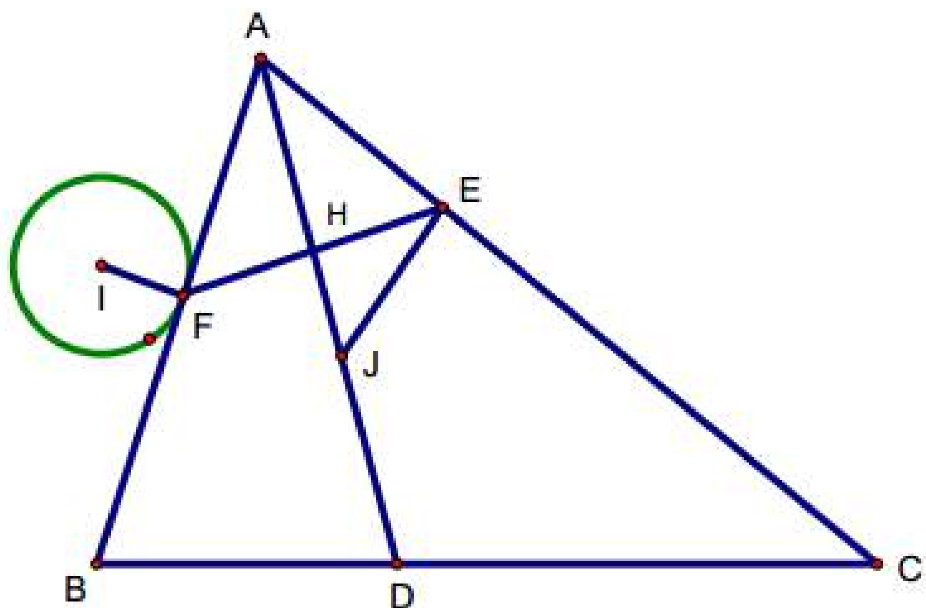
* Gọi F là điểm đối xứng với E qua d suy ra F(-1; 2).

Nhận xét (C) có tâm I(-2; 0), bán kinh $R=\sqrt{5}$ và F thuộc đường tròn (C).

Từ AB qua F và vuông góc IF nên ta có phương trình: $\boxed{AB: x+2y-3=0}$

* Khi đó A là giao điểm AB và d nên tọa độ A thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} x+2y-3=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(3;\ 0)}$$



Do đó, AC: 2x + y – 6 = 0. Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Đường thẳng Δ đi qua E và vuông góc AC suy Δ : x – 2y + 7 = 0.

Khi đó: J là giao điểm của d và Δ nên thỏa hệ:

$$\begin{cases} x+2y+7=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1}{3} \\ y=\dfrac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{J\left(\dfrac{-1}{3};\dfrac{10}{3}\right)}$$

* Gọi vecto pháp tuyến của đường thẳng BC là $\vec{n}=(a;b)\ (a^2+b^2>0)$. Ta có:

$$\cos 45^0=\frac{|2a+b|}{\sqrt{5}\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow 3a^2-8ab-3b^2=0$$

* Với a = 0, suy ra b = 0 (loại)

Với a khác 0 , ta chọn a = 1 suy ra $\left[\begin{array}{l} b=3 \\ b=\dfrac{-1}{3} \end{array}\right.$ (do hệ số góc âm nên ta nhận b = 3)

Suy ra phương trình BC: x + 3y + m = 0.

* Do J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên $d(J;AC)=d(J;BC)$

Suy ra $\dfrac{\left|\dfrac{-2}{3}+\dfrac{10}{3}-6\right|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\left|\dfrac{-1}{3}+10+m\right|}{\sqrt{10}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-29-10\sqrt{2}}{3} \\ m=\dfrac{-29+10\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$.

Do A, J nằm 2 phía BC từ đó ta có: $BC: x+3y-\dfrac{29+10\sqrt{2}}{3}=0$

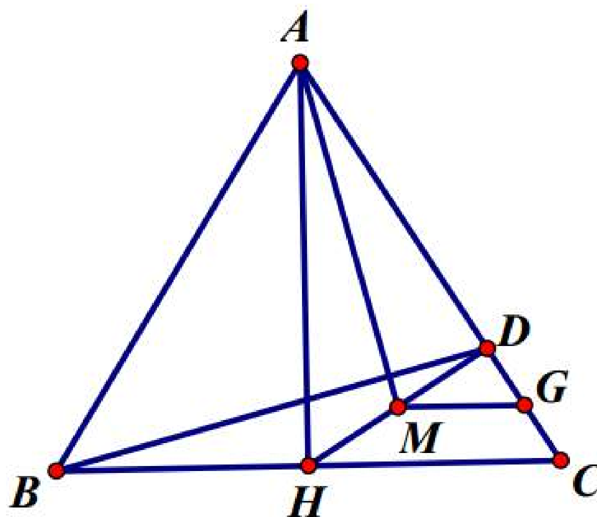
Vậy phương trình thỏa yêu cầu bài toán là

$$\boxed{AB: x+2y-3=0,\ AC: 2x+y-6=0, BC: x+3y-\frac{29+10\sqrt{2}}{3}=0}$$

Câu 147. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A với đường cao AH. Gọi HD là đường cao tam giác AHC và $M\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{15}{4}\right)$ là trung điểm của HD. Biết A thuộc $d: x+y-4=0$ và BD có phương trình $x-3y+10=0$. Tính tọa độ các đỉnh A, C biết H có hoành độ nguyên.

(Trích đề thi thử lần 3, THPT Cổ Loa, Hà Nội, năm 2015)

► Hướng dẫn giải :



* Vì tam giác ABC cân nên AH là đường cao. Gọi G là trung điểm của CD thì GM là đường trung bình tam giác DHC nên GM // HC

Suy ra GM vuông góc AH. Mà HM vuông góc AG nên AM vuông góc HG

Nhưng HG là đường trung bình tam giác BDC nên HG // BD. Vậy AM vuông góc BD.

* AM qua M và vuông góc BD nên AM: 3x + y – 6 = 0

Vì A là giai điểm AM và d nên tọa độ A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+y-4=0 \\ 3x+y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(1;\ 3)}$$

* Vì D thuộc BD: x – 3y + 10 = 0 suy ra D(3d – 10; d).

Do AD vuông góc MD nên $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{MD}=0 \Leftrightarrow 10d^2-72d+\dfrac{259}{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=\dfrac{7}{2} \\ d=\dfrac{37}{10} \end{array}\right.$

* Khi $d=\dfrac{7}{2} \Rightarrow D\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{2}\right) \Rightarrow H(1;4)$

AD: x + y – 4 = 0. BC đi qua H và vuông góc AH nên BC: y – 4 = 0. Khi đó **C(0; 4)**.

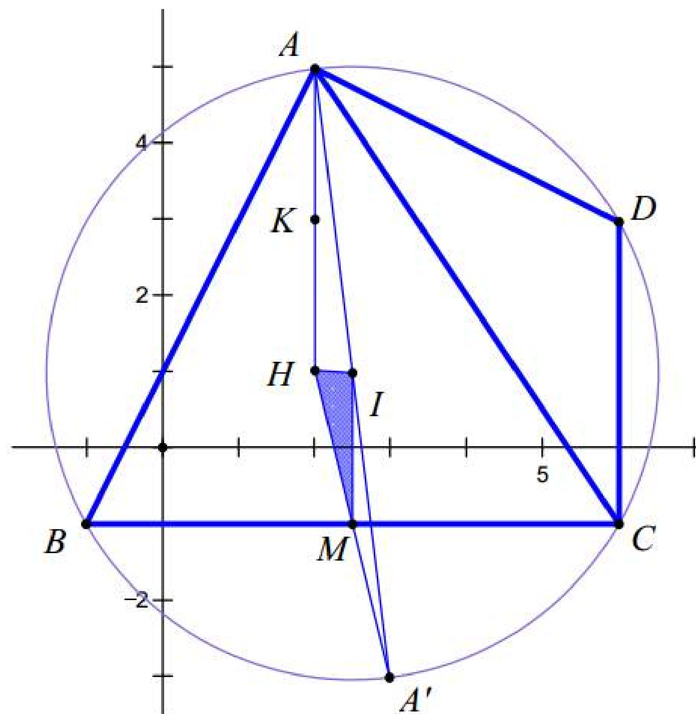
* Khi $d=\dfrac{37}{10} \Rightarrow D\left(\dfrac{11}{10};\dfrac{37}{10}\right) \Rightarrow H\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{19}{5}\right)$ (loại H co hoành độ nguyên)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(1;3),\ C(0;4)}$

Câu 148. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm I và có góc BCD bằng 90^0, CD song song với trục tung, tam giác ABC nhọn có trực tâm H. Trung điểm cạnh BC là $M\left(\dfrac{5}{2};-1\right)$, trung điểm cạnh HA là K(2; 3) và diện tích tam giác HMI bằng $\dfrac{1}{2}$. Xác định tọa độ các đỉnh của tứ giác ABCD, biết điểm B có hoành độ âm.

(*Trích đề thi thử Khảo sát chất lượng THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Từ giả thiết ta có AH // CD (vì cùng vuông góc với BC).

AH qua K(2; 3) nên **AH: x – 2 = 0**.

Đường thẳng BC qua M và vuông góc CD nên **BC: y + 1 = 0.**

Do vậy ta có thể giả sử B(b; -1) suy ra C(5 – b; -1)

* Vẽ đường kinh AA’, ta dễ dàng chứng minh được BHCA’ là hình bình hành tâm M. Suy ra M là trung điểm HA’. Do đó ta có:

$$S_{HMI}=\frac{1}{2}S_{HIA'}=\frac{1}{4}S_{HAA'}=S_{HKM}$$

Theo giả thiết, ta có: $S_{HMI}=\frac{1}{2}\Rightarrow S_{HKM}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}KH.d(M;HK)=\frac{1}{2}\Rightarrow\boxed{HK=2}$

* H thuộc AH: x – 2 = 0 nên H(2; h)

Vì KH = 2 nên ta có: $(h-3)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}h=1\\h=5\end{array}\right.$

* Với h = 1 thì H(2; 1) suy ra A(2; 5), $\overrightarrow{AB}=(b-2;-6)$, $\overrightarrow{HC}=(3-b;-2)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}=0\Leftrightarrow(b-2)(3-b)+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=-1\\b=6\end{array}\right.(b<0)\Rightarrow b=-1$

Suy ra B(-1; -1), C(6; -1). Dễ dàng kiểm tra tam giác ABC nhọn.
Tứ giác AHCD là hình bình hành nên dễ dàng tìm được D(6; 3).

* Với h = 5 thì H(2; 5) suy ra A(2; 1), $\overrightarrow{AB}=(b-2;-2)$, $\overrightarrow{HC}=(3-b;-6)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}=0\Leftrightarrow(b-2)(3-b)+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=-1\\b=6\end{array}\right.(b<0)\Rightarrow b=-1$

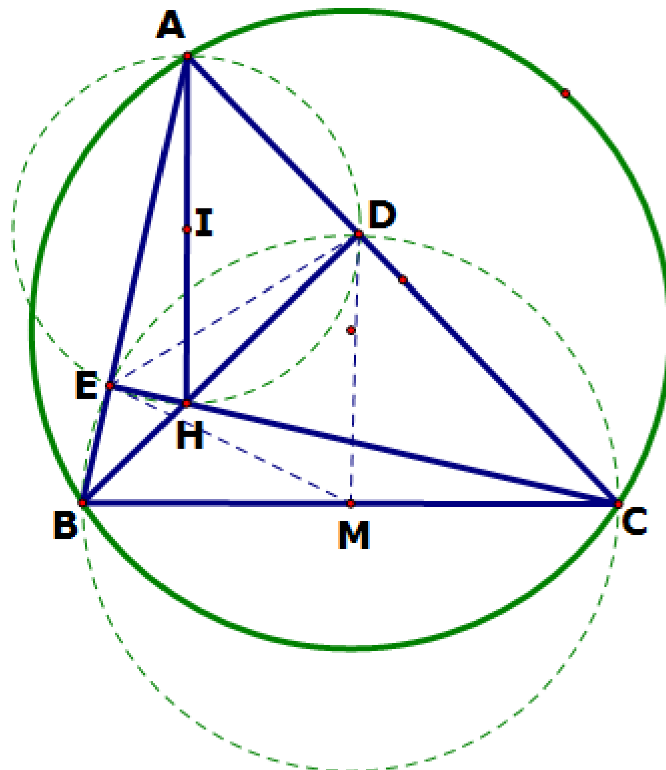
Suy ra B(-1; -1), C(6; -1). Trường hợp này ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}<0$ nên tam giác ABC từ, không thỏa mãn.

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(2;5),\ B(-1;-1),\ C(6;-1),\ D(6;3)}$

Câu 149. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A(-1;5) và điểm M(0;-2) là trung điểm cạnh BC. Gọi D, E lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh B và C. Đường phân giác của góc DME cắt đường cao hạ từ đỉnh A tại điểm I(0;3). Tìm toạ độ các đỉnh B, C biết rằng điểm B có hoành độ âm.

(*Trích đề thi thử lần 3, THPT Đa Phúc, Hà Nội, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Giả sử I là trung điểm AH, ta chứng minh MI là phân giác góc DME.

Tam giác EAH vuông có $EI = \frac{1}{2}AH$. Tương tự tam giác ADH có $DI = \frac{1}{2}AH$.

Do đó $EI = DI$ (1).

* Lại có tam giác BEC vuông tại E, tam giác BDC vuông tại D có $ME = MB = MC = MD$(2).

Từ (1),(2) ta có MI là phân giác góc DME.

* Phương trình đường cao AH đi qua A,I là $2x + y - 3 = 0$.

Đường thẳng BC đi qua M(0;-2) và vuông góc AH là $x - 2y - 4 = 0$.

Vì I là trung điểm AH nên H(1;1), gọi B(2b + 4; b) thuộc BC.

Vì M là trung điểm BC nên C(-2b - 4; -4 -b).

* Ta có: $\overrightarrow{AC} = (-2b-3;-b-9), \overrightarrow{HB} = (2b+3;b-1) \Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HB} = 0 \Leftrightarrow -(2b+3)^2 + (b-1)(-b-9) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -4 \\ b = 0 \end{array}\right. \Rightarrow B(-4;-4), C(4;0)$$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B(-4;-4),\ C(4;0)}$

Câu 150. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, lấy các điểm $A(\sqrt{2};\sqrt{2}),\ B(2\sqrt{2};0),\ C(\sqrt{2};-\sqrt{2})$. Các đường thẳng d_1 và d_2 cùng đi qua gốc tọa độ và hợp với nhau một góc 45^0. Biết rằng d_1 cắt đoạn AB tại M và d_2 cắt đoạn BC tại N. Khi tam giác OMN có diện tích bé nhất, hãy tìm M và viết phương trình các đường thẳng d_1 và d_2.

(*Trích đề thi Khảo sát chất lượng Sở GD&ĐT Đăk Nông, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi α là góc giữa d_1 với chiều dương trục hoành.

Và β là góc giữa d_2 với chiều dương trục hoành.

Ta có: $\alpha + \beta = 45^0$

* Mặt khác: $\begin{cases} OM = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos\alpha} \\ ON = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos\beta} \end{cases}$. Như vậy OMN có diện tích: $S = \frac{1}{2}OM.ON\sin 45^0$.

Hay là $S = \dfrac{\sqrt{2}}{2\cos\alpha.\cos\beta} = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos 45^0 + \cos(\alpha-\beta)}$.

Tam giác OMN có diện tích bé nhất với điều kiện $\cos(\alpha - \beta) = 1$, tức là $\alpha = \beta$

Vậy ta có $\alpha = \beta = \frac{\pi}{8}$.

* Ta có lúc này d_1 là phân giác của góc $\angle AOB$.

Do đó điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k = \dfrac{-OA}{OB} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$

Tọa độ điểm M sẽ là: $\begin{cases} x_M = 2 \\ y_M = 2(\sqrt{2}-1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{M(2;2(\sqrt{2}-1))}$

* Phương trình đường thẳng $d_1 : y = x\tan\frac{\pi}{8}$ *hay* $d_1 : y = x(\sqrt{2}-1)$

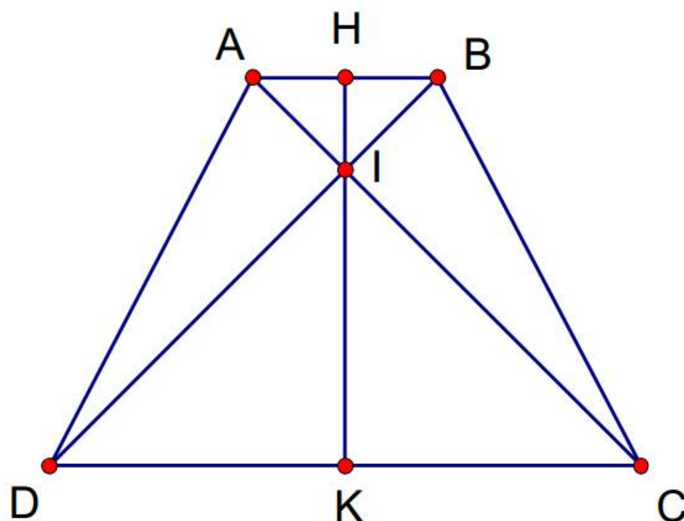
Đường thẳng d_2 đối xứng với d_1 qua trục hoành nên phương trình $d_1 : y = x(-\sqrt{2}+1)$

Vậy yêu cầu bài toán là $\boxed{M(2;2(\sqrt{2}-1)),\ d_1 : y = x(\sqrt{2}-1),\ d_2 : y = x(-\sqrt{2}+1)}$

Câu 151. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang cân ABCD có diện tích $\frac{45}{2}$ (AB // CD, AB < CD). Phương trình đường thẳng chứa cạnh CD là $x-3y-3=0$. Hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại I(2; 3). Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC biết C có hoành độ dương.

(Trích đề thi Khảo sát chất lượng Sở GD&ĐT Đồng Tháp, năm 2015)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi H, K lần lượt là trung điểm AB và CD. Do các tam giác IAB và ICD vuông cân tại I

Nên $IH \perp AB,\ IK \perp CD,\ IH = \frac{AB}{2},\ IK = \frac{CD}{2}$ suy ra I, H, K thẳng hàng

* Đường thẳng IK qua I vuông góc CD có phương trình là:

$$3(x-2)+1(y-3)=0 \Leftrightarrow \boxed{IK: 3x+y-9=0}$$

Tọa độ K là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-3y-3=0 \\ 3x+y-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{K(3;0)}$

Do KC = KD = KI = $\sqrt{10}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác ICD có tâm K bán kinh $\sqrt{10}$

Suy ra: $(C): (x-3)^2+y^2=10$

* Tọa độ C, D là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-3y-3=0 \\ (x-3)^2+y^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$ *hay* $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$

Do C có hoành độ dương nê ta nhận **C(6; 1), D(0; -1)**

* Mặt khác, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}HK(AB+CD) = (IH+IK).HK = (IH+IK)^2 = \frac{45}{2} \Rightarrow IH = \frac{\sqrt{10}}{2}$

Lại có: $\frac{IB}{ID} = \frac{IH}{IK} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{IB} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{ID} \Rightarrow \boxed{B(3;5)}$.

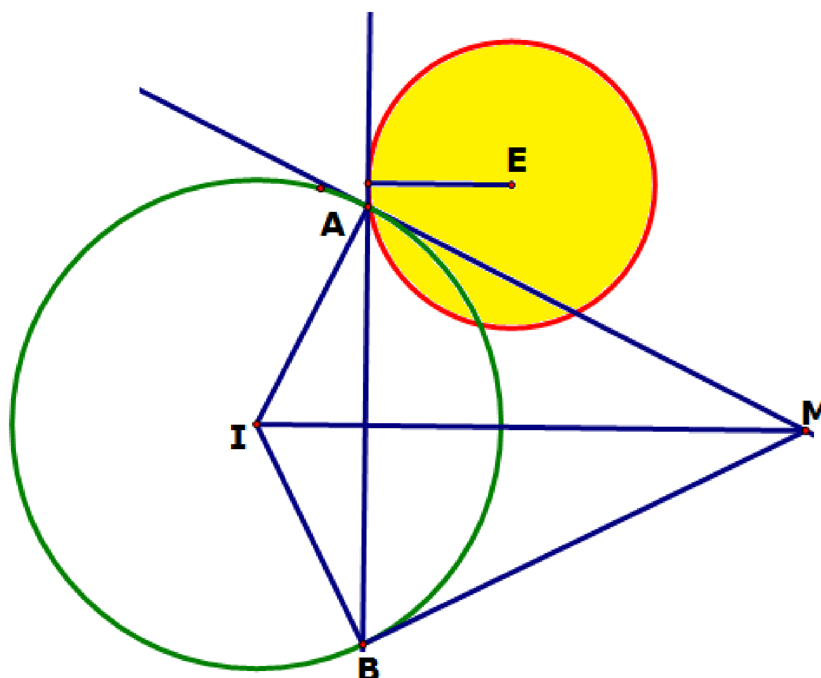
Phương trình đường thẳng cần tìm là BC: 4x + 3y – 27 = 0.

Vậy phương trình thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{BC: 4x+3y-27=0}$

Câu 152. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm E(3; 4), đường thẳng $d: x+y-1=0$ và đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2+4x-2y-4=0$. Gọi M là điểm thuộc đường thẳng d và nằm ngoài đường tròn (C). Từ M kẻ được các tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) (A, B là các tiếp điểm). Gọi (E) là đường tròn tâm E và tiếp xúc với đường thẳng AB. Tìm tọa độ điểm M sao cho đường tròn (E) có chu vi lớn nhất.

(Trích đề thi Khảo sát chất lượng Sở GD&ĐT Thanh Hóa, năm 2015)

► **Hướng dẫn giải :**



* Đường tròn (C) có tâm I(-2; 1), bán kính R = 3. Do M thuộc d nên M(a; 1 – a)

Do M nằm ngoài (C) nên ta có IM > R $\Leftrightarrow IM^2 > 9 \Leftrightarrow (a+2)^2 + a^2 > 9 \Leftrightarrow \boxed{2a^2 + 4a - 5 > 0\ (*)}$

* Ta có: $MA^2 = MB^2 = IM^2 - IA^2 = (a+2)^2 + a^2 - 9 = 2a^2 + 4a - 5$

Do đó tọa độ A, B thỏa mãn phương trình:

$$\boxed{(x-a)^2 + (y+a-1)^2 = 2a^2 + 4a - 5} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax + 2(a-1)y - 6a + 6 = 0\ (1)$$

* Mặt khác do A, B thuộc (C) nên tọa độ A, B thỏa mãn phương trình: $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0\,(2)$.

Trừ vế theo vế của (1) cho (2) ta được: $\Delta : (a+2)x - ay + 3a - 5 = 0$ (3).

Do tọa độ của A, B thỏa (3) nên (3) chính là phương trình đường thẳng qua AB.

* Lại có, (E) tiếp xúc với Δ nên (E) có bán kính $r = d(E;\Delta)$

Chu vi của (E) lớn nhất $\Leftrightarrow r$ lớn nhất $\Leftrightarrow d(E;\Delta)$ lớn nhất.

Nhận thấy đường thẳng Δ luôn đi qua điểm $K\left(\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của E lên Δ

Suy ra $d(E;\Delta) = \text{EH} \le \text{EK} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $H \equiv K \Leftrightarrow \Delta \perp EK$

* Ta có: $\overrightarrow{EK} = \left(\frac{-1}{2};\frac{3}{2}\right) = \frac{-1}{2}(1;-3)$ và Δ có vecto chỉ phương $\vec{u} = (a;a+2)$

Do đó, $\Delta \perp EK \Leftrightarrow \overrightarrow{EK}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow 1a - 3(a+2) = 0 \Leftrightarrow a = -3$ (thỏa mãn (*))

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{M(-3;4)}$

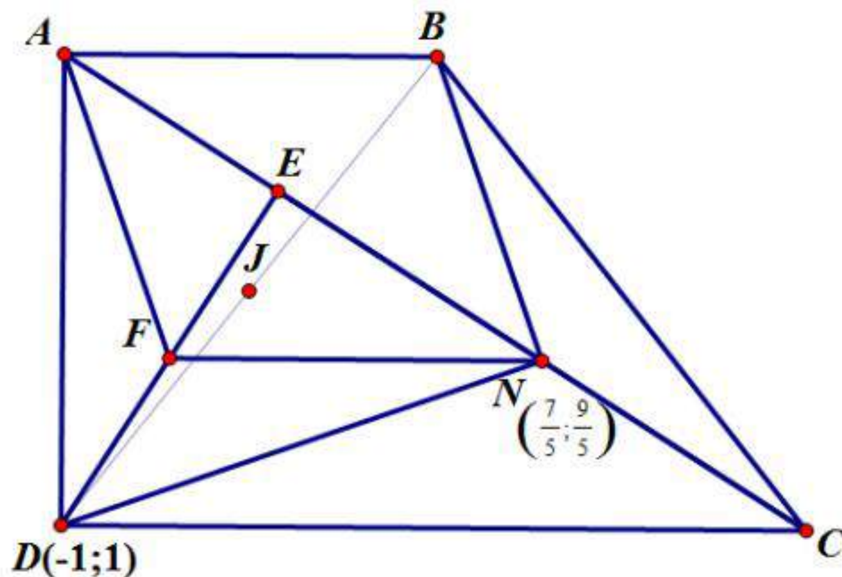
Câu 153. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại hai đỉnh A và D, CD = 2AB. Gọi E là hình chiếu vuông góc của D lên đường chéo AC. Đỉnh $D(-1;1)$, và điểm $N\left(\frac{7}{5};\frac{9}{5}\right)$ là trung điểm EC, đỉnh B thuộc đường thẳng $x - y + 2 = 0$. Tìm toa độ các đỉnh A, B, C.

(Trích đề thi thử THPT Thị Xã Quảng Trị, năm 2015)

► Hướng dẫn giải :

* Gọi J là trung điểm BD suy ra J(0; 2) và $BJ = \sqrt{2}$.

Phương trình đường tròn đường kinh BD là $(C): x^2 + (y-2)^2 = 2$



* Gọi A(a; b). Vì A thuộc (C) nên $a^2+(b-2)^2=2$ (1).

$\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}\Rightarrow C(1-2a;7-2b)$. Vì N là trung điểm EC nên $E\left(2a+\frac{9}{5};2b+\frac{17}{5}\right)$

Phương trình đường tròn đường kinh DN là $(C'):\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+\left(y-\frac{7}{5}\right)^2=\frac{8}{5}$

Lại có E thuộc (C') nên $(C'):\left(a+\frac{4}{5}\right)^2+\left(b-\frac{12}{5}\right)^2=\frac{8}{5}$ (2)

* Giải hệ gồm (1) và (2), ta được: $\begin{cases}a=-1\\b=3\end{cases}$ *hay* $\begin{cases}a=\frac{-7}{5}\\b=\frac{11}{5}\end{cases}$

Với A(-1; 3) suy ra C(3; 1) thỏa mãn.

Với $A\left(\frac{-7}{5};\frac{11}{5}\right)\Rightarrow C\left(\frac{19}{5};\frac{13}{5}\right)$ (loại vì N là trung điểm CD)

* Ta có: $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}\Rightarrow\begin{cases}4=2(x+1)\\0=2(y-3)\end{cases}\Rightarrow\boxed{B(1;3)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-1;3),B(1;3),C(3;1),\ D(-1;1)}$

Câu 154. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại C và D và AD = 2BC = 2CD. Qua điểm E thuộc cạnh BC kẻ đường thẳng vuông góc với DE cắt đường thẳng AB tại F. Tìm tọa độ các điểm B, C, D biết $A(6;-2),\ E(1;2),\ F(5;-1)$.

(Trích đề thi thử lần 6, THPT Chuyên Đại Học Sư Phạm Hà Nội, năm 2015)

► **Hướng dẫn giải :**

* Từ giả thiết suy ra tam giác ABD vuông cân tại B.

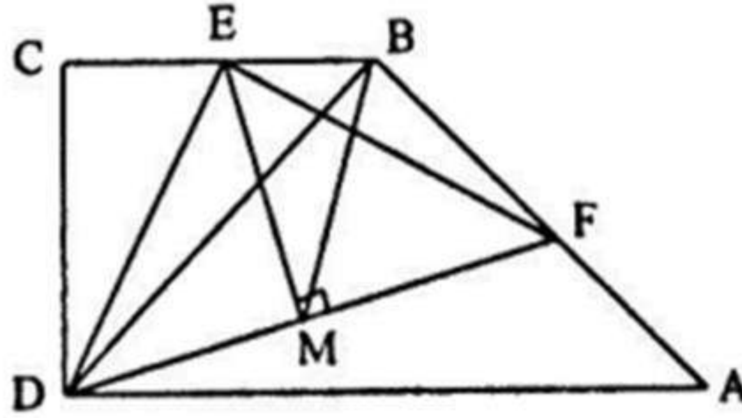
Gọi M là trung điểm DF thì $ME=\frac{DF}{2}=MB\Rightarrow\Delta MEB$ cân tai M $\Rightarrow\begin{cases}\angle MEB=\angle MBE\\\angle MFB=\angle MBF\end{cases}$

Xét tứ giác BEMF có $\angle MEB+\angle MFB=\angle MBE+\angle MBF=\angle EBF=135^0$

Suy ra $\angle EMF=360^0-2.135^0=90^0$. Vậy tam giác DEF vuông cân tại E nên ED = EF = 5.

* Ta có $\overrightarrow{EF}=(4;-3)\Rightarrow DE:4x-3y+2=0$

Giả sử $E \in ED \Rightarrow D\left(d;\frac{4d+2}{3}\right)$. Khi đó ED = 5 $\Leftrightarrow (d-1)^2 + \left(\frac{4d-4}{3}\right)^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=-2 \\ d=4 \end{array}\right.$



* Với d = 4. Khi đó **D(4; 6)**, $\overrightarrow{FA} = (1;-1)$ phương trình BD: x – y + 2 = 0, AF: x + y – 4 = 0.

Tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x-y+2=0 \\ x+y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(1;\ 3)}$

Mặt khác điểm B phải thuộc đường thẳng d đi qua e song song AD, nên tọa độ B phải thỏa mãn phương trình đường thẳng d: 4x + y – 6 = 0 (khi đó 4 + 3 – 6 = 0 dẫn đến mâu thuẫn).

* Với d = - 2. Khi đó **D(-2; -2)**, phương trình BD: x – y = 0

Tương tự ta có B là giao điểm BD và AF suy ra B(2; 2).

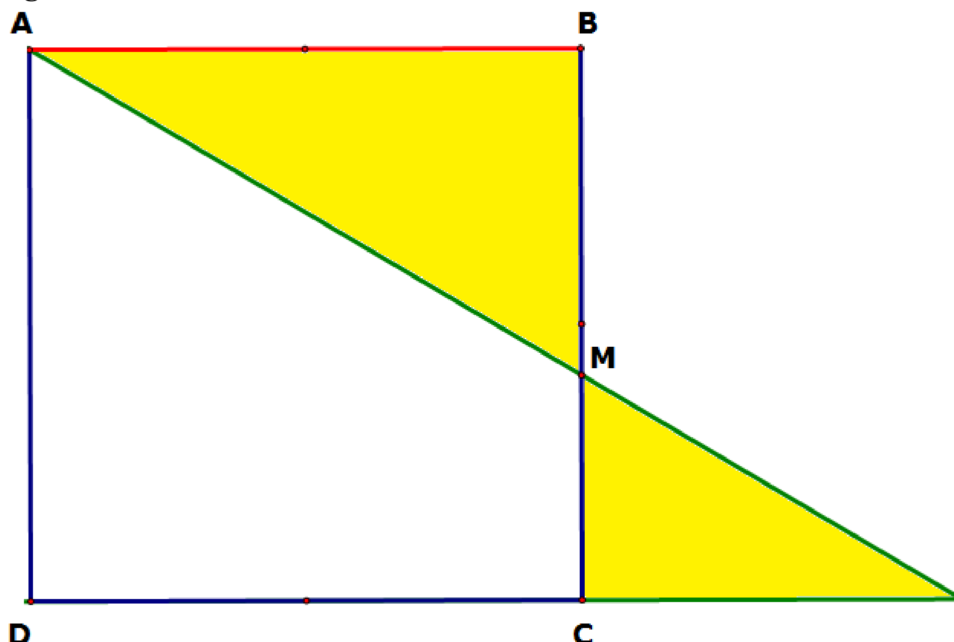
Ta có: $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} \Rightarrow C(-2;2)$. Khi đó $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD} = 0 = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} CD \perp BC \\ CD \perp AD \end{cases}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B(2;2), C(-2;2),\ D(-2;-2)}$

Câu 155. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD biết điểm A có tung độ dương, đường thẳng AB có phương trình $3x+4y-18=0$, điểm $M\left(\frac{21}{4};-1\right)$ thuộc cạnh BC, đường thẳng AM cắt đường thẳng CD tại N thỏa mãn $BM.DN = 25$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD.

(Trích đề thi thử THPT Quốc Gia, Sở GD&ĐT Cần Thơ, năm 2015)

► **Hướng dẫn giải :**



* Đường thẳng BC qua M và vuông góc với AB nên BC: 4x – 3y – 24 = 0.

Khi đó tọa độ B là nghiệm của hệ: $\begin{cases}4x-3y-24=0\\3x+4y-18=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=6\\y=0\end{cases} \Rightarrow \boxed{B(6;\ 0)}$

* Ta thấy các tam giác sau đồng dạng với nhau: $\Delta MBA \sim \Delta MCN \sim \Delta ADN$

Suy ra $\dfrac{MB}{AB}=\dfrac{MC}{NC}=\dfrac{AD}{ND} \Rightarrow MB.ND = AB.AD$ suy ra $AB^2 = 25$ hay cạnh hình vuông bằng 5.

Gọi $A(4a+6;-3a)\in AB$. Khi đó $AB^2 = 25 \Leftrightarrow 16a^2+9a^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\\a=-1\end{array}\right.$

Vì A có tung độ dương nên ta nhận **A(2; 3).**

* Phương trình đường thẳng CD có dạng: 3x + 4y + m = 0 ($m\neq -18$)

Vì cạnh hình vuông bằng 5 nên $d(B;CD)=\dfrac{|18+m|}{5}=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=7\\m=-43\end{array}\right.$

* Với m = 7, CD: 3x + 4y + 7 = 0. Khi đó tọa độ C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}4x-3y-24=0\\3x+4y+7=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\y=-4\end{cases} \Rightarrow \boxed{C(3;\ -4)}$$ (thỏa vì MC < 5).

Với m = -43 thì CD: 3x + 4y – 43 = 0. Khi đó tọa độ C là nghiệm của hê:

$$\begin{cases}4x-3y-24=0\\3x+4y-43=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=9\\y=4\end{cases} \Rightarrow \boxed{C(9;\ 4)}$$ (không thỏa vì MC > 5).

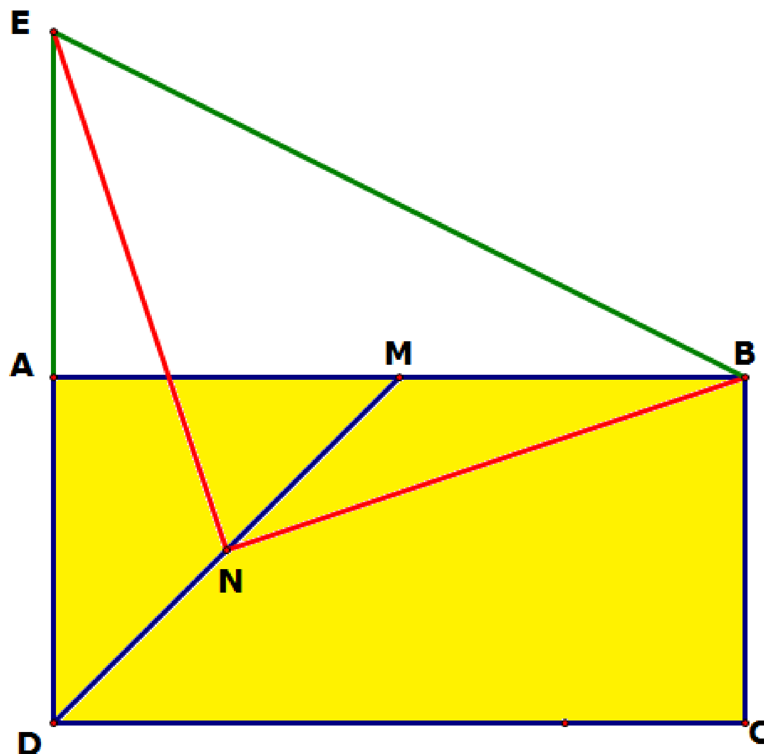
Do A(2; 3), C(3; -4) suy ra $I\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{-1}{2}\right)\xrightarrow{B(6;0)} D(-1;-1)$ (với I là tâm hình vuông ABCD).

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(2;3),\ B(6;0), C(3;-4),\ D(-1;-1)}$

Câu 156. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2BC, $B(7;3)$. Gọi M là trung điểm của đoạn AB, E là điểm đối xứng với D qua A. Biết rằng $N(2;-2)$ là trung điểm của DM, điểm E thuộc đường thẳng $\Delta: 2x-y+9=0$. Tìm tọa độ đỉnh D.

(Trích đề thi thử lần 4, THPT Chuyên Đại Học Vinh, năm 2015)

▶ **Hướng dẫn giải :**



* Trước hết ta chứng minh NE vuông góc NB. Đặt AB = 2BC = 2a (a > 0). Ta có:

$\overrightarrow{NE}.\overrightarrow{NB} = (\overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DE})(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{ND}.\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{ND}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{DE}.\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{DE}.\overrightarrow{MB}$

Suy ra $\overrightarrow{NE}.\overrightarrow{NB} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a}{\sqrt{2}}.a.\cos 135^0 + 2a.\frac{a}{\sqrt{2}}.\cos 45^0 = 0 \Rightarrow NE \perp NB$

* Do đó NE: x + y = 0. Khi đó tọa độ E là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - y + 9 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{E(-3;\, 3)}$$

* Gọi I là giao điểm BN và AD. Kẻ MH song song AD (H thuộc BI). Ta có: NI = NH, HI = HB

Suy ra $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{NI} \Rightarrow I\left(\frac{1}{3}; \frac{-11}{3}\right)$

* Lại có: AI = 2MH = 2DI suy ra $\overrightarrow{EI} = 5\overrightarrow{ID} \Rightarrow D(1;-5)$

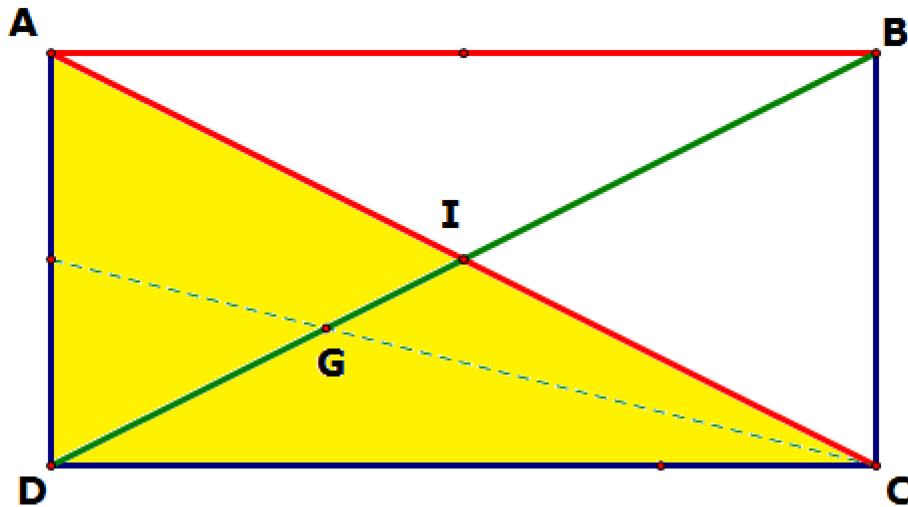
(Lưu ý: học sinh có thể đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{x},\ \overrightarrow{AD} = \vec{y}$, biểu thị hai vecto $\overrightarrow{NE},\ \overrightarrow{NB}$ qua $\vec{x},\ \vec{y}$. Từ đó dễ dàng suy ra NE vuông góc NB.

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{D(1;-5)}$

Câu 157. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD, đường thẳng AB, AC lần lượt có phương trình là $x - y + 5 = 0$ và $x + 3y - 7 = 0$. Trọng tâm G của tam giác ACD thuộc đường thẳng $d: 2x - y - 6 = 0$ Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

(***Trích đề thi thử số 1, Website: toanmath.com, năm 2015***)

► **Hướng dẫn giải :**



* Tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ x + 3y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-2;\, 3)}$$

* Vì B thuộc AB nên tọa độ B(b; b + 5)

Đường thẳng BC đi qua B và vuông góc với AB có phương trình là **BC: x + 2y – 2b – 5 = 0**

* Tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y - 2b - 5 = 0 \\ x + 3y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3b + 4 \\ y = -b + 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(3b + 4;\, -b + 1)}$$

* Ta có: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow D(2b + 2; -2b - 1)$.

Vì G là trọng tâm của tam giác ACD nên $G\left(\frac{5b+4}{3}; -b + 1\right)$

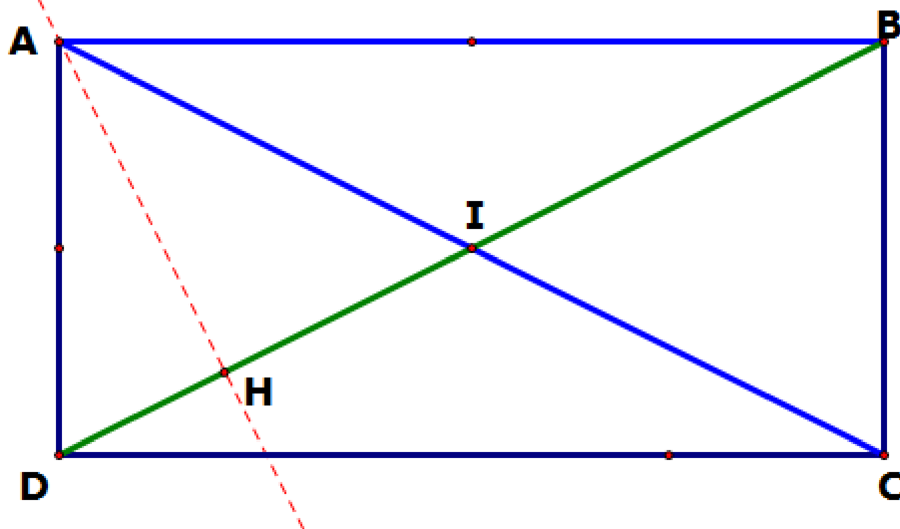
G thuộc d suy ra $2\left(\frac{5b+4}{3}\right)-(-b+1)-6=0 \Leftrightarrow b=1$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-2;3),\ B(1;6),\ C(7;0),\ D(4;-3)}$

Câu 158. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có tâm $I(2;3)$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A trên đường thẳng BD là điểm $H\left(\frac{7}{6};\frac{6}{5}\right)$. Biết điểm C nằm trên đường thẳng $d: 2x-y-6=0$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

(Trích đề thi thử số 2, Website: toanmath.com, năm 2015)

► **Hướng dẫn giải :**



* Ta có: $\overrightarrow{HI}=\left(\frac{3}{5};\frac{9}{5}\right) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_{AB}}=(1;3) \text{ la vtpt cua AB} \\ \overrightarrow{n_{BD}}=(3;-1) \text{ la vtpt cua } BD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AH: x+3y-5=0 \\ BD: 3x-y-3=0 \end{cases}$

* Vì A thuộc AH và C thuộc d nên ta có A(5 – 3a; a) và C(c; 2c – 6).

* Vì I là trung điểm của AC nên $\begin{cases} \frac{5-3a+c}{2}=2 \\ \frac{a+2c-6}{2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ c=5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-1;2),\ C(5;4)}$

* Vì B thuộc BD nên tọa độ B(b; 3b – 3).

Ta có: $IA^2=IB^2 \Leftrightarrow (-3)^2+(-1)^2=(b-2)^2+(3b-6)^2$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} b=3 \\ b=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(3;6) \Rightarrow D(1;0) \\ B(1;0) \Rightarrow D(3;6) \end{array}\right.$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là

$$\boxed{A(-1;2),\ B(3;6),\ C(5;4),\ D(1;0) \text{ hay } A(-1;2),\ B(1;0),\ C(5;4),\ D(3;6)}$$

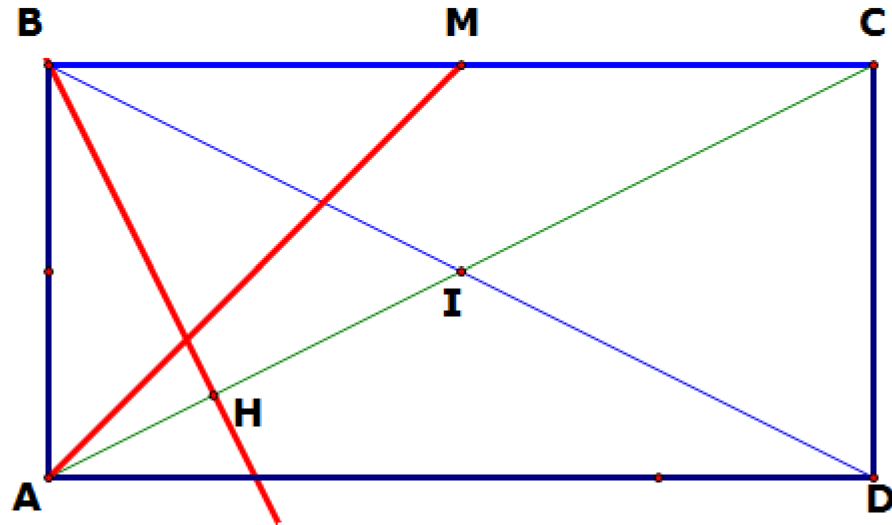
Câu 159. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm B(2; 0), đường thẳng đi qua đỉnh B và vuông góc với đường chéo AC có phương trình $7x-y-14=0$, đường thẳng đi qua đỉnh A và trung điểm của cạnh BC có phương trình $x+2y-7=0$. Tìm tọa độ điểm D của hình chữ nhật ABCD, biết điểm A có hoành độ âm.

(Trích đề thi thử số 3, Website: toanmath.com, năm 2015)

► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi M là trung điểm của cạnh BC, H là hình chiếu vuông góc của B trên AC. Ta c1o A và M thuộc đường thẳng $x+2y-7=0$ nên cọa độ có dạng: $A(7-2a;a),\ M(7-2m;m)$

* Do M là trung điểm của BC nên $\begin{cases} x_C = 2x_M - x_B = 12 - 4m \\ y_C = 2y_M - y_B = 2m \end{cases} \Rightarrow C(12-4m;2m)$



* Vì BH vuông góc AC nên ta có: $\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{n_{BH}}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{5-4m+2a}{7} = \dfrac{2m-a}{-1}$

* Vì AB vuông góc với BC nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (2a-5)(10-4m)+(-a).2m = 0$

Suy ra $(4m-3)(10-4m)-2m(2m+1)=0 \Leftrightarrow -2m^2+5m-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Với m = 1 nên a = 3 suy ra A(1; 3) (loại)

Với $m = \dfrac{3}{2} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \boxed{A(-1;4),\ C(6;3)}$

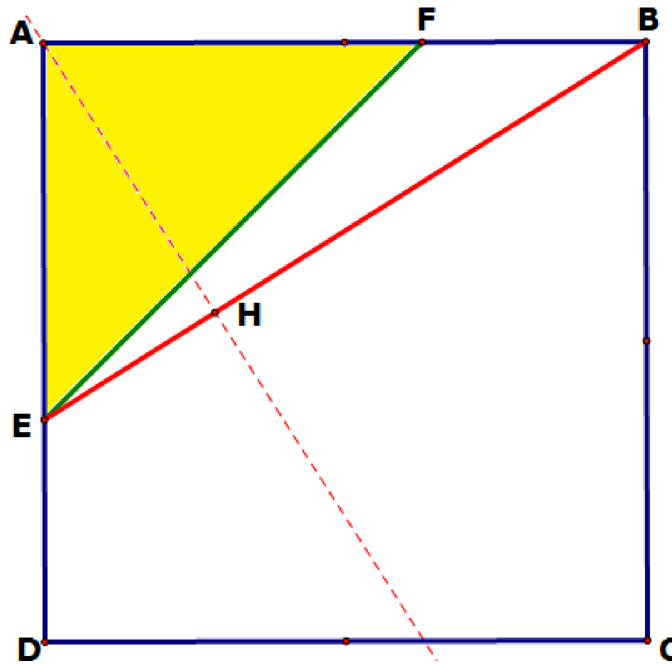
Mặt khác: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 1 = 6-2 \\ y_D - 4 = 3-0 \end{cases} \Rightarrow D(3;7)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-1;4),\ C(6;3),\ D(3;7)}$

Câu 160. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AD, AB lần lượt lấy hai điểm E, F sao cho AE = AF. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BE. Tìm tọa độ điểm C biết C thuộc đường thẳng $d: x-2y+1=0$ và hai điểm F(2; 0), H(1; -1).

(*Trích đề thi thử số 6, Website: toanmath.com, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Kéo dài AH cắt CD tại I, khi đó tứ giác BCIH nội tiếp đường tròn đường kinh BI

Mặt khác $\Delta ABE = \Delta DAI$ (cạnh góc vuông – góc nhọn).

Suy ra DI = AE mà AE = AF suy ra DI = AF suy ra BF = CI.

* Do đó BCIF là hình chữ nhật nên nội tiếp đường tròn đường kinh BI

Suy ra tức giác BCHF nội tiếp đường tròn.

Mà góc $\angle FBC = 90^0 \Rightarrow \angle DHC = 90^0 \Rightarrow \boxed{HF \perp HC}$

* Vì C thuộc d nên tọa độ có dạng C(2c – 1; c)

Lại có $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HF} = 0$ (*) với $\begin{cases} \overrightarrow{HC} = (2c-2; c+1) \\ \overrightarrow{HF} = (1;1) \end{cases}$

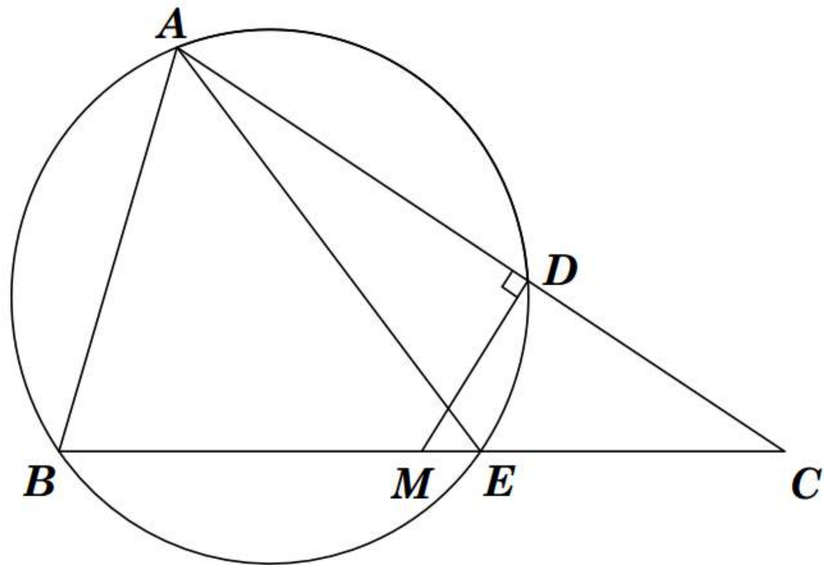
Do đó (*) $\Leftrightarrow c = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{-1}{3};\frac{1}{3}\right)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{C\left(\frac{-1}{3};\frac{1}{3}\right)}$

Câu 161. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh C(7; -4), M là trung điểm của BC và D là hình chiếu vuông góc của M trên cạnh AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt đoạn thẳng BC tại điểm E(4; -3). Biết rằng điểm A cách gốc tọa độ một khoảng bằng 5 và nằm về phía bên phải của trục tung. Xác định tọa độ điểm A.

(*Trích ngân hàng đề thi đại học 2015, Group toán 3K Class, Facebook, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải cách 1:**



* Tứ giác ABED nội tiếp đường tròn có C là giao điểm AD và BE nên:

$$CD.CA = CE.CB \text{ hay } CD.CA = CE.2CM \text{ hay } \frac{CD}{CM} = \frac{2CE}{CA} \ (1)$$

Trong tam giác vuông MDC, ta có $\cos\angle MCD = \frac{CD}{CM}$ (2)

Áp dụng định lý hàm cosin trong tam giác AEC ta có: $\cos\angle ACE = \frac{CA^2 + CE^2 - AE^2}{2CA.CE}$ (3)

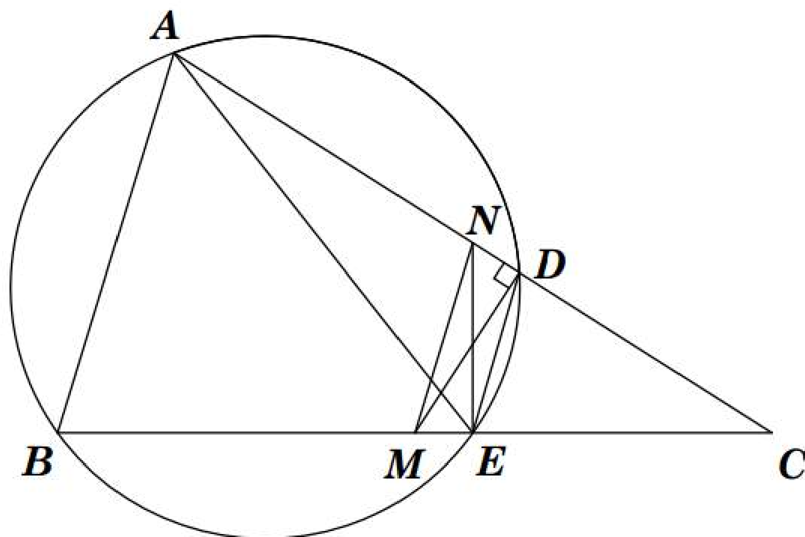
* Từ (1), (2), (3) ta có: $\frac{2CE}{CA} = \frac{CA^2 + CE^2 - AE^2}{2CA.CE} \Leftrightarrow 3CE^2 = CA^2 - AE^2 \Rightarrow \boxed{AE^2 = CA^2 - 30}$

* Đăt A(a; b) (với a > 0) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} OA = 5 \\ AE^2 = CA^2 - 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-4)^2 + (b+3)^2 = (a-7)^2 + (b+4)^2 - 30 \\ a^2 + b^2 = 5 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(3;4)}$$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(3;4)}$

► **Hướng dẫn giải cách 2:**



* Gọi N là trung điểm AC. Ta chứng minh NE vuông góc EC.

Ta có: MN là đường trung bình của tam giác ABC suy ra MN // BC $\Rightarrow \angle ABC = \angle NMC$ (1)

Tứ giác ADEB nội tiếp $\Rightarrow \angle ABE = \angle EDC$ (2) (cùng bù góc ADE).

* Từ (1) và (2) suy ra $\angle NMC = \angle EDC$ nên $\angle NME + \angle NDE = 180^0$

  Suy ra $\angle NEM = 90^0$ hay NE vuông góc EC.

* Đường thẳng NE qua E(4; -3) và vuông góc EC nên có phương trình: NE: 3x – y – 15 = 0.

  Điểm N thuộc NE nên N(t; 3t – 15) suy ra A(2t – 7; 6t – 26).

  Theo giả thiết bài toán ta có: OA = 5 $\Leftrightarrow (2t-7)^2 + (6t-26)^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 5 \\ t = \dfrac{7}{2} \end{array}\right.$

* Với t= 5 suy ra A(3; 4) (thỏa mãn)

  Với t = $\dfrac{7}{2} \Rightarrow A(0;-5)$ (không thỏa mãn)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(3;4)}$

► **Hướng dẫn giải cách 3**:

* Gọi H là chân đường cao hạ từ A trên BC. Chứng minh E là trung điểm HC.

  Tứ giác ABED nội tiếp nên ta có **CD.CA = CE. CB (1)**

  Tương tự AHMD nội tiếp nên ta có: **CD.CA = CM.CH (2)**

* Từ (1), (2) suy ra CE.CB = CM.CH $\Leftrightarrow CE = \dfrac{CM}{CB}.CH = \dfrac{CH}{2}$

  Do E là trung điểm HC nên suy ra H(3; -1)

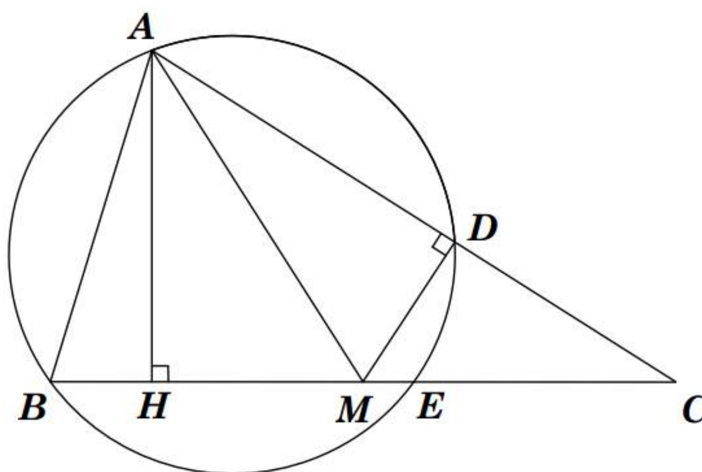
  Đường cao AH đi qua H(3; -1) vuông góc EC nên **AH: 3x – y – 5 = 0**

* Điểm A thuộc AH nên A(a; 3a – 5) (a > 0)

  Theo giả thiết ta có OA = 5 $\Leftrightarrow a^2 + (3a-5)^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 3 \end{array}\right.$

  So điều kiện ta nhận a = 3 suy ra A(3; 4)

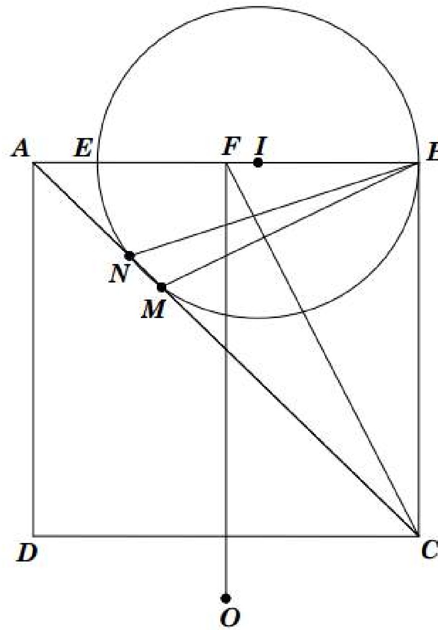
Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(3;4)}$



Câu 162. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có M, N lần lượt là các điểm nằm trên đường chéo AC sao cho AC = 3AM = 4AN. Đường tròn ngoại tiếp của tam giác BMN có phương trình là $(C): x^2 + y^2 - 15x - 13y + 86 = 0$. Biết rằng trung trực của CD đi qua gốc tọa độ O và điểm A có hoành độ nguyên. VIết phương trình đường thẳng AB.

(*Trích ngân hàng đề thi đại học 2015, Group toán 3K Class, Facebook, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Đường tròn (C) có tâm $I\left(\frac{15}{2};\frac{13}{2}\right)$ và bán kinh $R=\frac{5}{\sqrt{2}}$. Đặt cạnh hình vuông bằng a (a > 0)

Ta có: $CM.CN=\frac{2AC}{3}.\frac{3AC}{4}=\frac{AC^2}{2}=a^2$ (1)

Do ABCD là hình vuông nên AB vuông góc BC (2).

Từ (1) và (2) ta có AB đi qua tâm I và BC là tiếp tuyến của đường tròn (C).

* Gọi E là giao điểm của (C) và AB (E khác B) Ta có:

$$AE.AB=AN.AM=\frac{AC}{4}.\frac{AC}{3}=\frac{AC^2}{12}=\frac{a^2}{6}$$

Suy ra $AE=\frac{a}{6}$, $EB=AB-AE=\frac{5a}{6}$. Do đó $\frac{5}{\sqrt{2}}=R=IB=\frac{EB}{2}=\frac{5a}{12}\Rightarrow a=6\sqrt{2}$

* Gọi F là trung điểm AB suy ra IF = BF – BI = $3\sqrt{2}-\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ta có: $OF=\sqrt{OI^2-IF^2}=7\sqrt{2}$, $OA=\sqrt{AF^2+OF^2}=2\sqrt{29}$.

Đặt A(a; b) với a là số nguyên. Ta có: $\begin{cases} AI=AF+IF=3\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{7}{\sqrt{2}} \\ AO=2\sqrt{29} \end{cases}$

* Do đó $\begin{cases} a\in Z \\ \left(a-\frac{15}{2}\right)^2+\left(b-\frac{13}{2}\right)^2=\frac{49}{2} \\ a^2+b^2=116 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=4 \\ b=10 \end{cases}\Rightarrow \boxed{A(4;10)}$

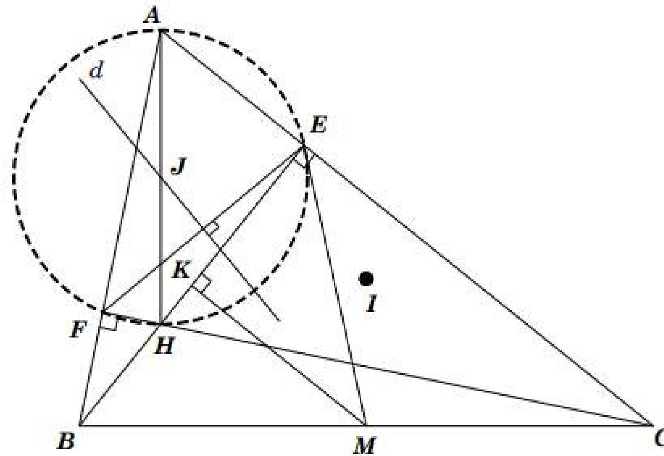
Đường thẳng AB qua A và I nên có dạng: **AB: x + y – 14 = 0.**

Vậy phương trình thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{AB: x+y-14=0}$

Câu 163. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nhọn có $H\left(3;\frac{-4}{3}\right)$ và $I\left(6;\frac{-7}{3}\right)$ lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B, C trên cạnh AC, AB. Đường trung trực của đoạn EF có phương trình: $d: x-3y-10=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác, biết điểm B có tung độ dương và BE: x – 3 = 0.

(***Trích ngân hàng đề thi đại học 2015, Group toán 3K Class, Facebook, năm 2015***)

► Hướng dẫn giải cách 1:



* Trước hết ta chứng minh trung trực d của EF cắt AH tại trung điểm.

Ta có: $\angle AEH = \angle AFH = 90^0$ nên tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn đường kinh AH. Mà EF là dây cung nên trung trực d của EF sẽ đi qua tâm. Hay nói cách khác trung trực d của EF cắt AH tại trung điểm J.

Do J thuộc d nên J(3t + 10, t). Điểm J là trung điểm AH, suy ra $A\left(6t+17; 2t+\frac{4}{3}\right)$

Đường thẳng AC đi qua A vuông góc BE nên có phương trình **AC: 3y – 6a – 4 = 0**

* Ta có E là giao điểm AC và BE suy ra $E\left(3; 2a+\frac{4}{3}\right)$. Gọi M là trung điểm BC, ta có:

AH = 2IM suy ra $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM} \Rightarrow M\left(-3a-1; -\frac{11}{3}-a\right)$

MB = ME suy ra M thuộc trung trực của BE. Gọi Δ là trung trực BE, suy ra Δ qua M và vuông góc BE nên

$$\Delta: 3y + 3a + 11 = 0$$

* Gọi K là giao điểm Δ và BE suy ra $K\left(3; \frac{-11}{3}-a\right)$ và K là trung điểm BE nên $B\left(3; \frac{-26}{3}-4a\right)$

Ta có IA = IB $\Leftrightarrow (6a+11)^2 + \left(2a+\frac{11}{3}\right)^2 = 3^2 + \left(\frac{19}{3}+4a\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \frac{4}{3} \\ a = \frac{-8}{3} \end{array}\right.$

Do B có tung độ dương nên ta chọn $a = \frac{=8}{3}$

* Khi đó A(1; -4), B(3; 2) và M(7; -1) suy ra C(11; -4)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(1;-4),\ B(3;2),\ C(11;-4)}$

► Hướng dẫn giải cách 2:

* Đường trung trực d và BE lần lượt có các vecto pháp tuyến là $\overrightarrow{n_d} = (1;-3),\ \overrightarrow{n_{BE}} = (1;0)$

Ta có: $\cos\alpha = \cos(d;BE) = |\cos(\overrightarrow{n_d},\ \overrightarrow{n_{BE}})| = \dfrac{|\overrightarrow{n_d}.\overrightarrow{n_{BE}}|}{|\overrightarrow{n_d}|.|\overrightarrow{n_{BE}}|} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

* Tứ giác BFEC nội tiếp nên góc FEB = góc FCB (do cùng chắn cung BF)

Mặt khác, ta có: $\begin{cases} \angle BKM + \angle FEB = 90^0 \\ \angle FBC + \angle FCB = 90^0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\angle BKM = \angle FBC\ (1)}$

Mặt khác, ta có: góc ABC = góc AIN (cùng chắn một nửa số đo cung AC (2)

Từ (1), (2), suy ra $\angle BKM = \angle AIN$ nên:

$$\frac{1}{\sqrt{10}} = \cos\alpha = \frac{IN}{AI} = \frac{\frac{BH}{2}}{AI} = \frac{BH}{2AI}\quad (*)$$

Điểm B thuộc BE nên B(3; b) với b > 0. Từ $(*) \Leftrightarrow 2BI = \sqrt{10}BH \Leftrightarrow 4BI^2 = 10BH^2 \Rightarrow b = 2\ hay\ \boxed{B(3;2)}$

* Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, suy ra

$\angle xAB = \angle ACB$ (do cùng bằng một nửa số đo cung AB) (3)

Từ giác BFEC nội tiếp nên $\angle ACB = \angle AFE$ (do cùng bù góc $\angle BFE$) (4)

* Từ (3) và (4) suy ra $\angle xAB = \angle AFE$ nên Ax // EF so le trong) hay IA vuông góc EF.

* Đường tròn tâm $I\left(6;\dfrac{-7}{3}\right)$, bán kinh $IB = \dfrac{5\sqrt{10}}{3}$ có phương trình là:

$$(C): (x-6)^2 + \left(y+\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{250}{9}$$

* Từ hệ thức $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{IN}$ suy ra N(6; -4). Khi đó đường thẳng AC đi qua N và vuông góc với BE nên có phương trình AC: y + 4 = 0.

* Tọa độ điểm A và C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-6)^2 + \left(y+\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{250}{9} \\ y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=-4 \\ x=11, y=-4 \end{array}\right.$$

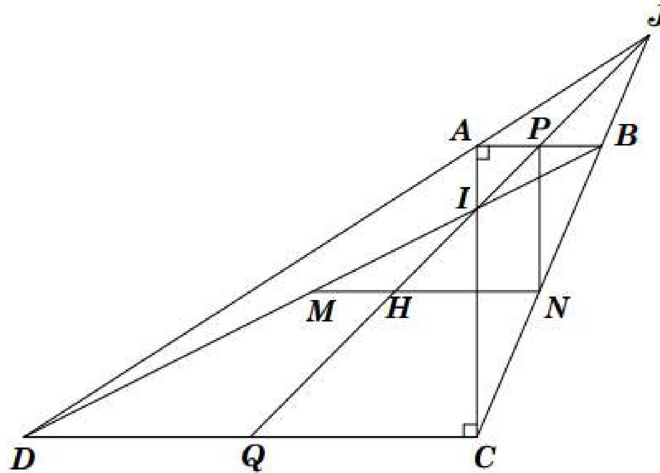
* Do IA vuông góc EF hay IA // d nên ta chọn A(1; -4), C(11; -4)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(1;-4),\ B(3;2),\ C(11;-4)}$

Câu 164. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD có hai đáy AB, CD với AB < CD. Biết rằng AC vuông góc CD và $M\left(\frac{-3}{2};\frac{1}{2}\right)$, $N\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ lần lượt là trung điểm của BD, BC. Gọi I là giao điểm AC và BD, J là giao điểm của AD và BC. Tìm tọa độ các đỉnh A và B, biết đường thẳng IJ có phương trình là $3x-y+3=0$.

(Trích ngân hàng đề thi đại học 2015, Group toán 3K Class, Facebook, năm 2015)

► **Hướng dẫn giải :**



* Trước hết ta chứng minh IJ đi qua trung điểm của AB và trung điểm CD.

Do P là trung điểm AB, Q là giao điểm QI và CD nên ta có: $\frac{AP}{CQ}=\frac{IP}{IQ}=\frac{PB}{QD}$

Mà AP = BP, suy ra CQ = QD hay Q là trung điểm CD.

* Tiếp theo ta sẽ chứng minh AD, BC và PQ đồng quy tại J. Tức là J, P, Q thẳng hàng.

Gọi Q' là giao điểm JP và CD, ta cần chứn minh Q' trùng Q. Ta có:

$$\frac{JA}{JD}=\frac{AP}{DQ'}=\frac{JP}{JQ'}=\frac{PB}{Q'C}=\frac{JB}{JC}$$

Suy ra $\frac{AP}{DQ'}=\frac{PB}{CQ'}$ mà PA = PB nên DQ' = CQ' hay Q' là trung điểm CD.

Do đó Q' trùng Q.

* Ta có: $MN=\sqrt{10}\Rightarrow DC=2MN=2\sqrt{10}$ .Vì N, P lần lượt là trung điểm BC, AB nên PN // AC suy ra PN vuông góc MN.

Đường thẳng PN qua $N\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ và có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{MN}=(3;1)$ nên **PN: 3x + y – 6 = 0**

Do P là giao điểm PN và IJ nên tọa độ P là nghiệm của hệ: $\begin{cases}3x+y-6=0\\3x-y+3=0\end{cases}\Rightarrow P\left(\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$

* Đường thẳng MN: x – 3y + 3 = 0. Gọi H là giao điểm MN và IJ nên H là trung điểm PQ

Suy ra Q(-2 ; -3).

Đường thẳ AB đi qua P và vuông góc PN nên AB: x – 3y + 13 = 0.

Điểm A thuộc AB nên **A(3a – 13; a)**. Ta có:

$$AQ^2=AC^2+CQ^2=4PN^2+MN^2=50\Leftrightarrow(11-3a)^2+(-3-a)^2=50\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=4\\a=2\end{array}\right.$$

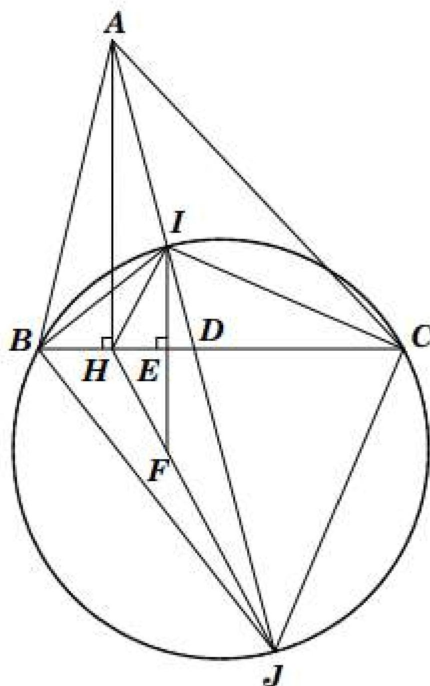
Do đó A(-1;4) hay A(-7; 2). Do AB < CD nên $AP<\frac{CD}{2}$ nên ta chọn A(-1; 4) suy ra B(2; 5).

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-1;4),\ B(2;5)}$

Câu 165. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp là I(0; -1), tâm đường tròn bàng tiếp góc A là J(5; 4) và điểm $H\left(\frac{11}{25};\frac{-2}{25}\right)$ là hình chiếu của điểm A trên cạnh BC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác, biết điểm B có hoành độ dương.

(*Trích ngân hàng đề thi đại học 2015, Group toán 3K Class, Facebook, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Trước hết ta chứng minh BC là phân giác của góc IHJ.

Qua I kẻ đường thẳng vuông góc với BC, cắt BC tại E và cắt HJ tại F. Ta cần chứng minh E là trung điểm IF. Theo tính chất đường phân giác ta có: $\frac{ID}{IA}=\frac{BD}{BA}=\frac{JD}{JA}$ \

Suy ra: $\frac{ID}{IA+ID}=\frac{JD}{JA+JD}$ *hay* $\frac{ID}{DA}=\frac{JD}{JA+JD}$

Suy ra: $\frac{ID}{DA}=\frac{JD+ID}{JA+JD+DA}$ *hay* $\frac{ID}{DA}=\frac{JD}{2JA}$

Mà $\frac{ID}{AD}=\frac{IE}{AH}=\frac{IJ}{AJ}=\frac{IF}{AH}$ nên từ (*) ta suy ra $\frac{IE}{AH}=\frac{IF}{2AH}$ *hay* $IF=2IE$

Điều này chứng tỏ E là trung điểm IF nên HE là phân giác góc IHJ

* Ta có: $\angle IBJ=\angle ICJ=90^0$ nên tứ giác IBJC nội tiếp đường tròn đường kinh IJ.

Đường tròn đường kinh IJ có phương trình : $(C):\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$

Đường thẳng IH có phương trình IH: 23x – 11y – 11 = 0.

Đường thẳng JH có phương trình JH: 17x – 19y – 9 = 0.

* Phương trình phân giác tạo bởi hai đường thẳng IH và JH là:

$$\frac{23x-11y-11}{\sqrt{23^2+11^2}}=\pm\frac{17x-19y-9}{\sqrt{17^2+19^2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x+4y-1=0\\4x-3y-2=0\end{array}\right.$$

Do BC là phân giác trong của góc IHJ nên I và J khác phía so với BC.

Vì vậy ta chọn BC: 3x + 4y – 1 = 0.

* Tọa độ B, C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x+4y-1=0 \\ \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3; y=-2 \\ x=-1; y=1 \end{array}\right.$

Do điểm B có hoành độ dương nên ta chọn **B(3; -2), C(-1; 1).**

Đường thẳng AH đi qua H và vuông góc BC nên AH: 4x – 3y – 2 = 0.

Đường thẳng IJ có phương trình IJ: x – y – 1 = 0.

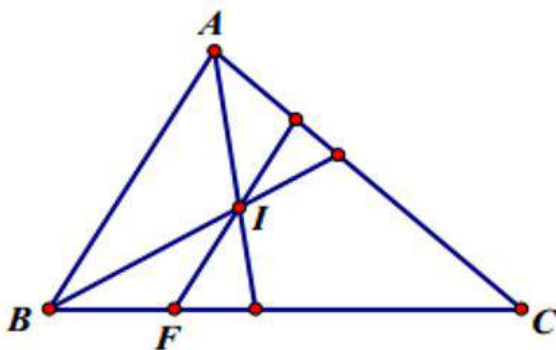
Lại có A là giao điểm AH và IJ suy ra **A(-1; -2)**

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-1;-2), B(3;-2), C(-1;1)}$

Câu 166. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(5;3), B(-4;6)$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đường thẳng qua I và song song với AB cắt BC tại $F\left(\frac{-11}{4};\frac{9}{4}\right)$. Tìm tọa độ đỉnh C của tam giác ABC.

(Trích đề thi thử lần 3, THPT Hàn Thuyên, Bắc Ninh, năm 2015)

► Hướng dẫn giải :



* Ta có IF // AB suy ra $\angle ABI = \angle BIF$, $\angle ABI = \angle IBF$. Suy ra tam giác BFI cân tại F

Suy ra BF = FI .

* FI qua F và vuông góc AB nên có phương trình:

$$1\left(x+\frac{11}{4}\right)+3\left(y-\frac{9}{4}\right)=0 \Leftrightarrow FI: x+3y-4=0$$

* Gọi I(4 – 3t; t) thuộc IF. Ta có:

Suy ra y = 1 hay y $=\frac{7}{2}$ suy ra $I\left(\frac{-13}{2};\frac{7}{2}\right)$ *(loai) hay* $I(1;1)$

* Phương trình BI: x + y – 2 = 0. Gọi F' là điểm đối xứng của F qua BI. Ta tìm được tọa độ điểm $F'\left(\frac{-1}{4};\frac{19}{4}\right)$. Khi đó phương trình AB: x + 3y – 14 = 0.

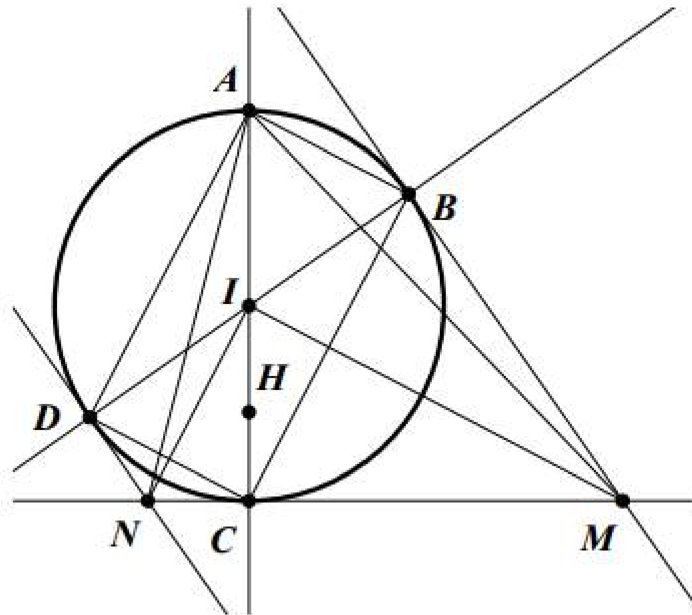
Phương trình AC: 3x + y + 6 = 0 và toa độ C(1; -9)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{C(1;-9)}$

Câu 167. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD nội tiếp đường tròn (C) tâm I(5; 2). Các tiếp tuyến của (C) tại B, D cắt tiếp tuyến của (C) tại C lần lượt tại M, N. Trực tâm tam giác AMN là điểm $H(5;-1)$. Diện tích tam giác AMN bằng 78. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết C có tung độ âm và hoành độ của M và N đều dương (trong đó hoành độ của M lớn hơn hoành độ của N).

(Trích đề thi thử lần 2, THPT Chuyên Lý Tự Trọng, Bình Định, năm 2015)

► Hướng dẫn giải :



* Đường tròn (C) có tâm I là giao điểm của AC và BD suy ra AC vuông góc với MN.

Do đó AC là đường cao của tam giác AMN, nên H thuộc AC. AC qua I và H nên AC có phương trình **x – 5 = 0.**

* C thuộc AC nên C có tọa độ C(5; c) (c < 0). Vì I là trung điểm AC nên suy ra A(5; 4 – c).

Đường thẳng MN qua C và vuông góc với AC nên có phương trình y – c = 0.

* Vì M, N thuộc đường thẳng MN nên suy ra tọa độ M(m; c), N(n; c) (với m > n > 0).

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (m-5; 2c-4) \\ \overrightarrow{HN} = (n-5; c+1) \\ \overrightarrow{IM} = (m-5; c-2) \\ \overrightarrow{IN} = (n-5; c-2) \end{cases}$. Do H là trực tâm tam giác AMN nên ta có: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{HN} = 0$ (1)

Theo tính chất tiếp tuyến ta có IM và IN lần lượt là phân giác của các góc $\widehat{BIC}, \widehat{CID}$

Mặt khác, B, I, D thẳng hàng nên suy ra $\widehat{MIN} = 90^0 \Rightarrow IM \perp IN \Rightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IN} = 0$ (2)

* Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases} (m-5)(n-5) + (2c-5)(c+1) = 0 \\ (m-5)(n-5) + (c-2)^2 = 0 \end{cases}$ (I)

Suy ra $(2c-4)(c+1) = (c-2)^2 \Leftrightarrow c^2 + 2c - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 2 \\ c = -4 \end{array} \right.$ Vì C có tung độ âm nên ta nhận c = - 4.

Suy ra $C(5;-4),\ A(5;8)\ suy\ ra\ AC = 12$

Hơn nữa từ hệ (I) với c = - 4 ta có : (m – 5)(n – 5) + 36 = 0 (2)

* Mặt khác, $S_{AMN} = \dfrac{1}{2}AC.MN = 78 \Leftrightarrow MN = 13 \Leftrightarrow |m-n| = 13 \Leftrightarrow m - n = 13$ (3) $(do\ m > n)$

Từ (2), (3) giải được: m = 14, n = 1 (nhận) hoặc m = 9, n = - 4 (loại do n < 0).

Suy ra **M(14; -4), N(1; 4)**.

* Ta có: IB = IC = 6 và đường tròn $(C): (x-5)^2 + (y-2)^2 = 36$ (*) .

Mặt khác $IM = \sqrt{117} \Rightarrow CM = BM = \sqrt{IM^2 - IB^2} = \sqrt{117-36} = 9$.

Suy ra B, C thuộc đường tròn : $(C'): (x-14)^2 + (y+4)^2 = 81$ (**)

* Giải hệ (*) và (**) ta được: $\begin{cases} x = \dfrac{137}{13} \\ y = \dfrac{56}{13} \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 5 \\ y = -4 \end{cases}$ $suy\ ra\ B\left(\dfrac{137}{13}; \dfrac{56}{13}\right)$

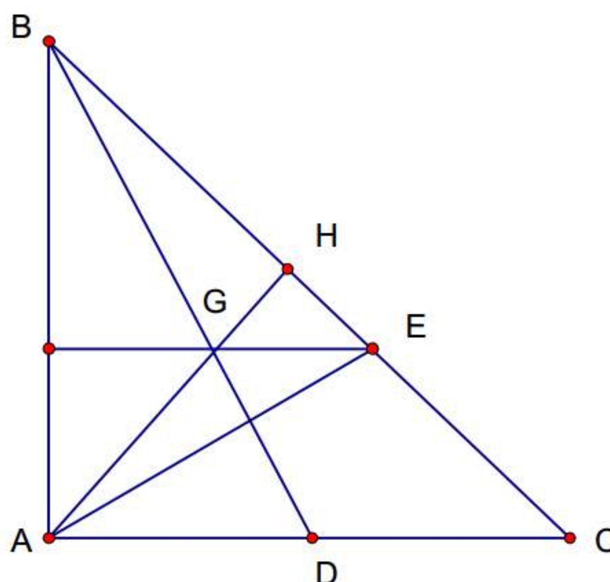
Suy ra I là trung điểm BD nên suy ra $D\left(\frac{-7}{13};\frac{-4}{13}\right)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(5;8),B\left(\frac{137}{13};\frac{56}{13}\right),C(5;-4),D\left(\frac{-7}{13};\frac{-4}{13}\right)}$

Câu 168. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại A, G(1; 2) là trọng tâm tam giác ABC, đường thẳng đi qua A vuông góc với BG cắt BC tại E(5; 2). Xác định tọa độ đỉnh C.

(*Trích đề thi thử THPT Nguyễn Duy Trinh, Nghệ An, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* G là trực tâm của tam giác ABE suy ra EG // AG mà EG = 4.

$$\frac{GE}{AC}=\frac{HG}{HA}=\frac{1}{3}\Rightarrow AC=12\Rightarrow BC=12\sqrt{2}\Rightarrow AH=6\sqrt{2}\Rightarrow GH=2\sqrt{2}$$

* Gọi H(a; b) . Tọa độ H thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases}GH\perp HE\\GH=2\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{GH}.\overrightarrow{HE}=0\\(a-1)^2+(b-2)^2=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)(5-a)-(b-2)^2=0\\(a-1)^2+(b-2)^2=8\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow(a-1)(5-\mathrm{a})+(\mathrm{a}-1)^2-8=0\Leftrightarrow a=3\Rightarrow(b-2)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\b=4\end{array}\right.$$

* Ta có: $\overrightarrow{HE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$.

Với H(3; 0) suy ra C(9; 6).

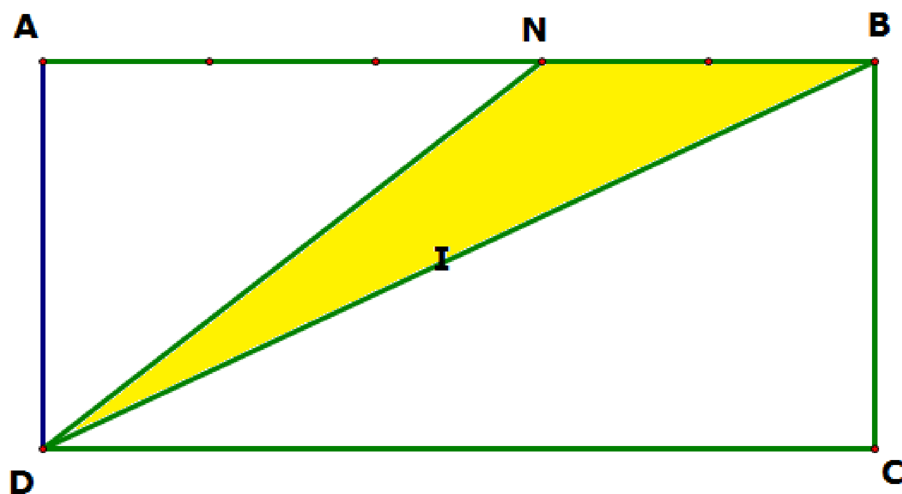
Với H(3; 4) suy ra C(9; 2).

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{C(9;6)\text{ hay }C(9;2)}$

Câu 169. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có tâm I(1; 3). Gọi N là điểm thuộc cạnh AB thỏa mãn 3AN = 2AB. Biết đường thẳng DN có phương trình $x+y-2=0$ và AB = 3AD. Tìm tọa độ đỉnh B.

(*Trích đề thi thử THPT Nguyễn Huệ, Nam Định, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi AD = a > 0 suy ra AB = 3a $\Rightarrow BN = a,\ AN = 2a.$

Xét tam giác ABD có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{10}$

Xét tam giác ADN có $DN = \sqrt{AD^2 + AN^2} = a\sqrt{5}$

Xét tam giác BDN có $\cos\widehat{BDN} = \dfrac{BD^2 + DN^2 - BN^2}{2BD.DN} = \dfrac{10a^2 + 5a^2 - a^2}{2a\sqrt{10}.a\sqrt{5}} = \dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

* BD đi qua I(1; 3) có 1 vecto pháp tuyến là $\vec{n} = (a;b)\ (a^2 + b^2 > 0)$ có phương trình

$$ax + by - a - 3b = 0$$

* Ta có $\cos\widehat{BDN} = \dfrac{7\sqrt{2}}{10} \Leftrightarrow \dfrac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{2}} = \dfrac{7\sqrt{2}}{10} \Leftrightarrow 24a^2 - 50ab + 24b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a = 4b \\ 4a = 3b \end{array}\right.$

* Với 3a = 4b, ta chọn a = 4 nên b = 3 suy ra BD: 4x + 3y – 13 = 0

D là giao điểm BD và DN suy ra tọa độ D là nghiệm hệ:

$\begin{cases} 4x + 3y - 13 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D(7;-5)}$. Vì I là trung điểm BD nên ta có: B(-5; 11).

* Với 4a = 3b, ta chọn a = 3 nên b = 4 suy ra BD: 3x + 4y – 15 = 0

D là giao điểm BD và DN suy ra tọa độ D là nghiệm hệ:

$\begin{cases} 3x + 4y - 15 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 9 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D(-7;9)}$. Vì I là trung điểm BD nên ta có: B(9; -3).

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B(-5;11) \text{ hay } B(9;-3)}$

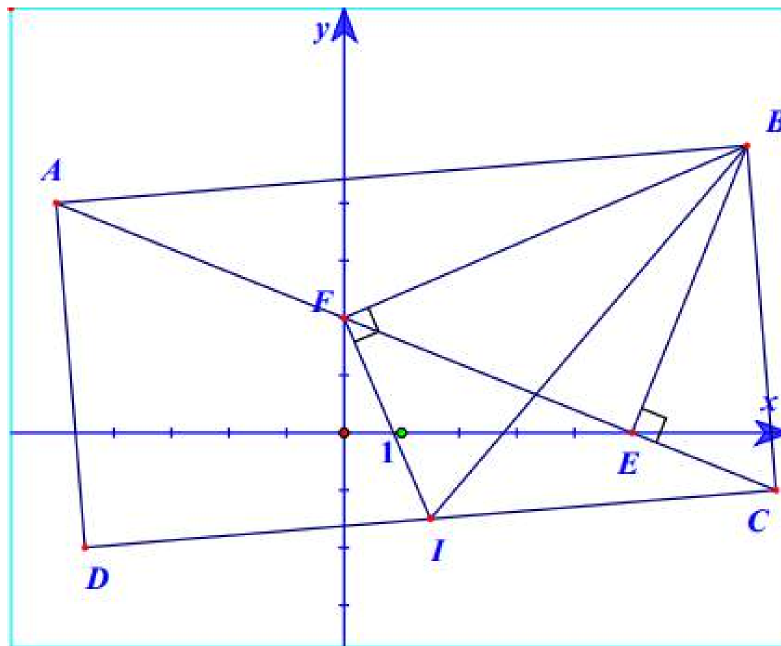
Câu 170. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng AC là E(5; 0), trung điểm của AE và CD lần lượt là F(0; 2), $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{-3}{2}\right)$. Viết phương trình đường thẳng CD.

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định, năm 2015)

► **Hướng dẫn giải :**

* Tọa độ đỉnh A(-5; 4). Phương trình đường thẳng AC: 2x + 5y – 10 = 0.

* Ta chứng minh BF vuông góc IF:



$$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BE}),\ \overrightarrow{FI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{FC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EC})$$

Suy ra: $4\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{FI}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BE})(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EC})=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{EC}$

Suy ra $4\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BC}=-\text{BE}^2+\text{BE}^2=0.$

Do đó BF vuông góc IF

* BF vuông góc IF và qua F nên có phương trình: 7x + 3y – 6 = 0.

BE vuông đi qua E và vuông góc EF nên có phương trình 5x – 2y – 25 = 0.

B là giao điểm của BF và BE nên tọa độ B thỏ hệ:

$$\begin{cases}7x+3y-6=0\\5x-2y-25=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=7\\y=5\end{cases}\Rightarrow\boxed{B(7;5)}$$

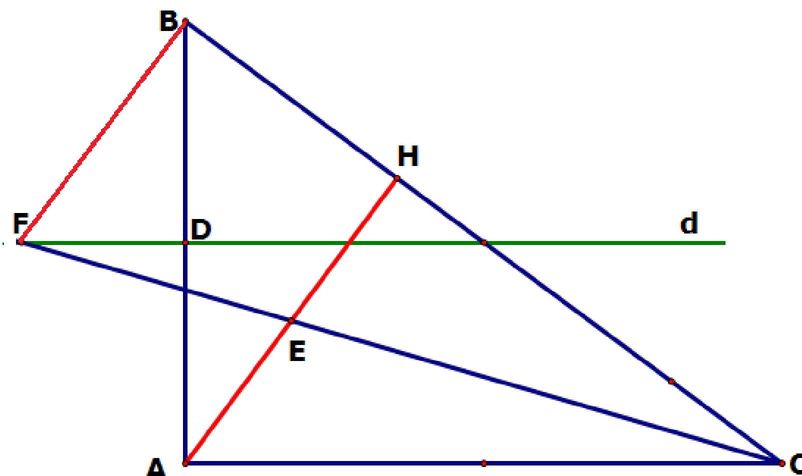
* Phương trình đường thẳng CD qua là 2x – 24y – 39 = 0.

Vậy phương trình đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{CD:2x-24y-39=0}$

Câu 171. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB và AH. Đường thẳng vuông góc với AB tại D cắt đường thẳng CE tại $F(-1;3)$. Đường thẳng BC có phương trình là $x-2y+1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, biết điểm D thuộc đường thẳng $3x+5y=0$ và hoành độ của điểm D là số nguyên.

(*Trích đề thi thử lần 3, THPT Hồng Quang, Hải Dương, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Giả sử DE cắt AC tại M. FD vuông góc AB, AC vuông góc AB suy ra FD // CA

Ta có: $\frac{CE}{EF}=\frac{EM}{ED}=\frac{CH}{HC}\Rightarrow\frac{CE}{EF}=\frac{CH}{HB}\Rightarrow EH//BF\Rightarrow\boxed{BF\perp BC}$

* Đường thẳng FB đi qua F(-1; 3) và vuông góc với BC nên nó nhận vecto chỉ phương của đường thẳng BC là $\vec{u}=(2;1)$ là vecto pháp tuyến.

Phương trình BF: $2(x+1)+1(y-3)=0\Leftrightarrow 2x+y-1=0$

* Khi đó tọa độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}2x+y-1=0\\x-2y+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{5}\\y=\frac{3}{5}\end{cases}\Rightarrow\boxed{B\left(\frac{1}{5};\frac{3}{5}\right)}$$

Vì D không thuộc đường thẳng 3x + 5y = 0 suy ra

$$D\left(d;\frac{-3d}{5}\right),\ \overrightarrow{FD}=\left(d+1;\frac{-3d}{5}-3\right),\ \overrightarrow{BD}=\left(d-\frac{1}{5};\frac{-3d}{5}-\frac{3}{5}\right)$$

Do BD vuông góc FD nên $\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{BD}=0\Leftrightarrow 17d^2+37d+20=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=-1\ (tm)\\d=\frac{-20}{17}\ \text{(ktm)}\end{array}\right.$ Vậy $D\left(-1;\frac{3}{5}\right)$

* Vì D là trung điểm của AB nên $A\left(\frac{-11}{5};\frac{3}{5}\right)$.

Đường thẳng AC đi qua $A\left(\frac{-11}{5};\frac{3}{5}\right)$ và vuông góc AB nên có phương trình:

$$\frac{12}{5}\left(x+\frac{11}{5}\right)+0\left(y-\frac{3}{5}\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{-11}{5}$$

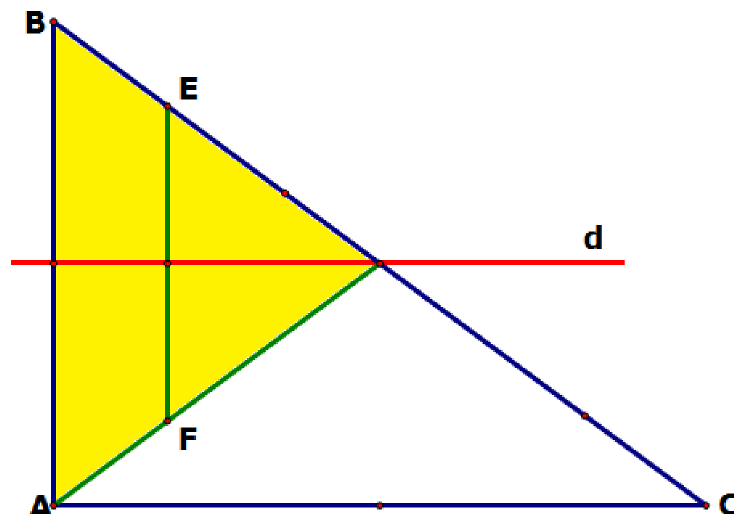
Khi đó C là giao điểm của AC và BC nên $C\left(\frac{-11}{5};\frac{-3}{5}\right)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A\left(\frac{-11}{5};\frac{3}{5}\right),\ B\left(\frac{1}{5};\frac{3}{5}\right),\ C\left(\frac{-11}{5};\frac{-3}{5}\right)}$

Câu 172. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, đường thẳng AB và đường thẳng chứa trung tuyến AM của tam giác ABC lần lượt có phương trình $4x+3y+1=0$ và $7x-y+8=0$. Điểm $E(10;3)$ thuộc đường thẳng BC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

(*Trích đề thi thử lần 8, THPT Chuyên Đại Học Sư Phạm Hà Nội, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Tọa độ điểm A là nghiệm của hê: $\begin{cases} 4x+3y+1=0 \\ 7x-y+8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-1;1)}$

Gọi F là điểm thuộc AM sao cho EF // AB. Suy ra EF có phương trình 4x + 3y – 49 = 0.

Vì F thuộc AM nên tọa độ F là nghiệm của hê: $\begin{cases} 4x+3y-49=0 \\ 7x-y+8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=15 \end{cases} \Rightarrow \boxed{F(1;15)}$

* Đường trung trực d của EF có phương trình: 6x – 8y + 39 = 0.

Do tam giác MAB cân tại M nên tam giác MEF cân tại M. Suy ra d đi qua trung điểm H của AB và trung điểm M của BC.

* Tọa độ M thỏa hệ: $\begin{cases} 6x-8y+39=0 \\ 7x-y+8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1}{2} \\ y=\dfrac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{M\left(\dfrac{-1}{2};\dfrac{9}{2}\right)}$

Ta có: $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BM} \Rightarrow \boxed{C(3;4)}$

* Tọa độ H thỏa mãn hệ: $\begin{cases} 6x-8y+39=0 \\ 4x+3y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-5}{2} \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{H\left(\dfrac{-5}{2};3\right)}$

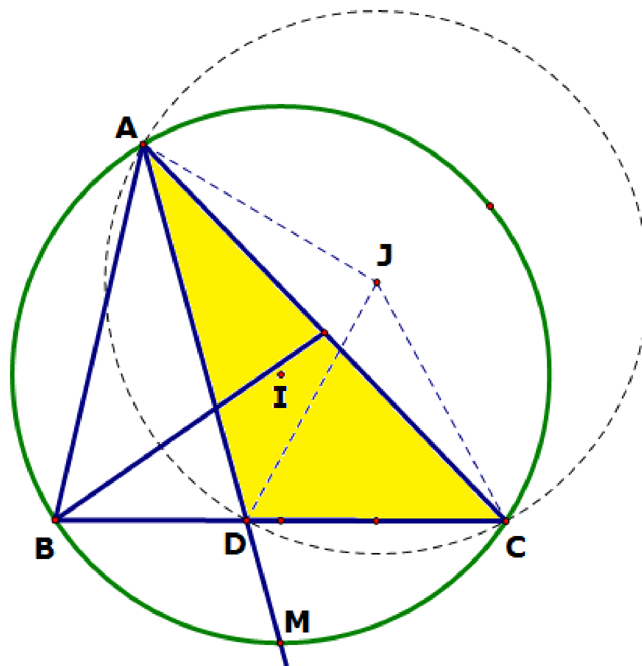
Ta có: $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AH} \Rightarrow \boxed{B(-4;5)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-1;1),\ B(-4;5),\ C(3;4)}$

Câu 173. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I(2;2), điểm D là chân đường phân giác trong của góc BAC. Đường thẳng AD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm M (khác A). Tính tọa độ các điểm A, B, C biết J(-2; 2) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD và phương trình đường thẳng CM là $x+y-2=0$.

(*Trích đề thi thử THPT Quốc Gia, Bắc Ninh, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Ta có: $\widehat{AJD}=2\widehat{CAD}$ (do tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I).

Mà $\widehat{CAD}=\widehat{BAD}=\widehat{BCM} \Rightarrow \widehat{CJD}=2\widehat{BCM}$

Ta lại có: ΔCJD cân tại J nên

$\widehat{CJD}+2\widehat{CJD}=180^0 \Rightarrow 2\widehat{BCM}+2\widehat{CJD}=180^0 \Rightarrow \widehat{BCM}+\widehat{CJD}=90^0$

Do đó CM vuông góc CJ

* Suy ra phương trình CJ có dạng: x – y + d = 0

J thuộc đường thẳng CJ suy ra -2 -2 + d = 0 nên d = 4 suy ra **CJ: x – y + 4 = 0**

Mà C là giao điểm giữa CJ và CM nên tọa độ C thỏa hệ:

$$\begin{cases} x-y+4=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(-1;3)}$$

* Đường thẳng AC đi qua điểm C(-1; 3) và có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{IJ}=(-4;0)$ nên có phương trình là

$$AC: x+1=0 \Rightarrow A(-1;a)$$

Mặt khác IA = IC $\Leftrightarrow 9+(a-2)^2=9+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(-1;3)\ (\text{loai}) \\ A(-1;1) \end{array}\right.$

* Vì M thuộc CM nên M(m; 2 – m)

Lại có IM = IC $\Leftrightarrow (m-2)^2+m^2=9+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(3;-1) \\ M(-1;3)\ (loai) \end{array}\right.$

Đường thẳng BC đi qua điểm C(-1; 3) và vuông góc IM nên BC: x – 3y + 10 = 0.
Do đó B(3b – 10; b)

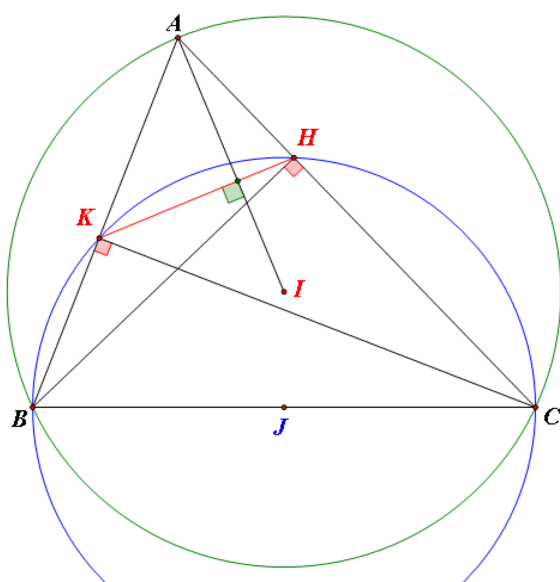
Mặt khác IB = IC $\Leftrightarrow (3b-12)^2+(b-2)^2=9+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=3 \\ b=\frac{23}{5} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(-1;3)\ (\text{loai}) \\ B\left(\frac{19}{5};\frac{23}{5}\right) \end{array}\right.$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-1;1), B\left(\frac{19}{5};\frac{23}{5}\right), C(-1;3)}$

Câu 174. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I(1; 2) bán kinh bằng 5. Chân đường cao hạ từ B, C của tam giác ABC lần lượt là $H(3;3), K(0;-1)$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCHK, biết rằng tung độ điểm A dương.

(*Trích đề thi thử THPT Chuyên Hoàng Lê Kha, Tây Ninh, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Trước hết ta chứng minh IA vuông góc HK (việc chứng minh này xin dành cho bạn đọc).

* IA qua I và có vecto pháp tuyến là $\vec{n}=(3;4)$ nên có phương trình:

$$3(x-1)+4(y-2)=0 \Leftrightarrow IA: 3x+4y-11=0$$

* Ta có A thuộc IA nên A(1 + 4t; 2 – 3t) với $t<\frac{2}{3}$.

Lại có IA = R = 5 nên $16t^2+9t^2=25\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\ (loai)\\ t=-1\end{array}\right.\Rightarrow\boxed{A(-3;5)}$

* Ta có: AB qua K(0;-1) và A nên có phương trình AB: 2x + y + 1 = 0.

AC qua H(3;3) và A nên có phương trình AC: x + 3y – 12 = 0

BH qua H(3; 3) vuông góc AC nên có phương trình: BH: 3x – y – 6 = 0.

CK qua K(0; -1) và vuông góc AB nên có phương trình: CK: x – 2y – 2 = 0.

* Khi đó tọa độ B là nghiệm của hệ: $\begin{cases}3x-y-6=0\\2x+y+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=-3\end{cases}\Rightarrow\boxed{B(1;-3)}$

* Khi đó tọa độ C là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x+3y-12=0\\x-2y-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=6\\y=2\end{cases}\Rightarrow\boxed{C(6;2)}$

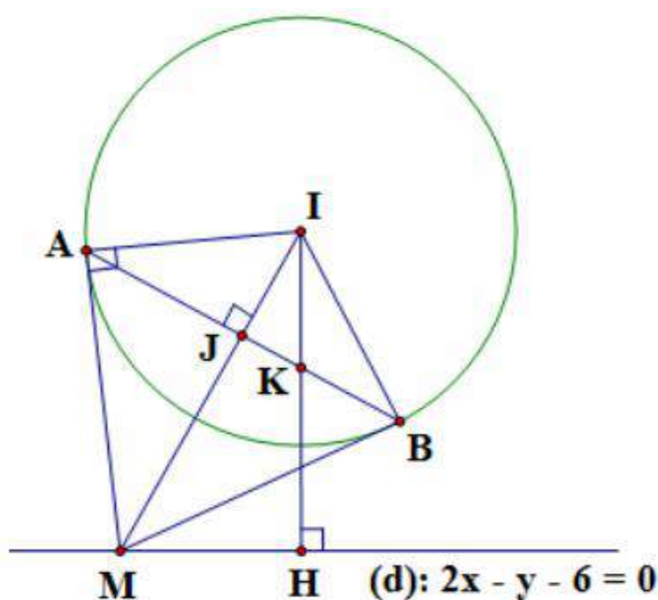
Đường tròn (C) ngoại tiếp tứ giác BCHK có tâm $J\left(\frac{7}{2};\frac{-1}{2}\right)$. Trung điểm BC, bán kinh R = $\frac{BC}{2}$

Vậy phương trình đường tròn thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{(C):\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{2}}$

Câu 175. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có tâm I và bán kinh $R=\sqrt{10}$, gọi M là một điểm trên đường thẳng $d:2x-y-6=0$ sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) (A, B là hai tiếp điểm). Biết rằng phương trình đường AB là $x-y=0$ và khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng d bằng $2\sqrt{5}$. Viết phương trình đường tròn (C).

(*Trích đề thi thử lần 4, THPT Lê Xoay, Vĩnh Phúc, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên d, ta có $IH=d(I;d)=2\sqrt{5}>R=\sqrt{10}$.

Suy ra từ một điểm M bất kỳ trên d luôn kẻ được hai tiếp tuyến tới (C).

Gọi K, J tương ứng là giao điểm của AB với IH và IM. Khi đó K nằm giữa I và H.

* Hai tam giác IJK và IHM đồng dạng nên ta có: $\frac{IJ}{IH}=\frac{IK}{IM}\Rightarrow IK.IH=IJ.IM$

Lại có: $IJ.IM=IA^2=10\Rightarrow IK=\frac{IJ.IM}{IH}=\frac{10}{2\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

Suy ra K là trung điểm IH nên $KH = \sqrt{5}$

* Đặt K(t; t) thuộc đường AB. Khi đó:

$$d(K;d) = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|t-6|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 11 \\ t = 1 \end{array}\right.$$

Với t = 1 suy ra K(1; 1), khi đó phương trình IH: x + 2y – 3 = 0.

Ta có: H là giao điểm IH và d nên H(3; 0) suy ra I(-1; 2).

Vậy phương trình đường tròn là: $\boxed{(C):(x+1)^2+(y-2)^2=10}$

* Với t = 11 suy ra K(11; 11), khi đó phương trình IH: x + 2y – 33 = 0.

Ta có: H là giao điểm IH và d nên H(-7; 20) suy ra I(29; 2).

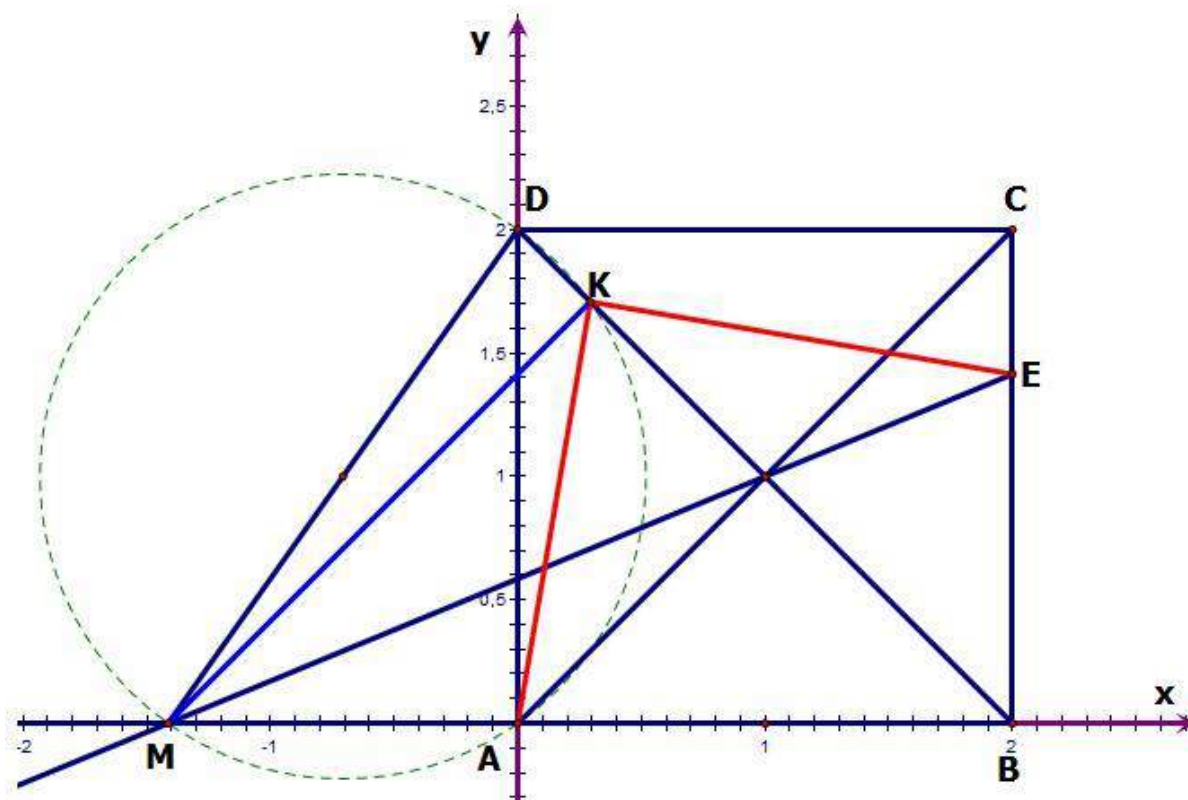
Vậy phương trình đường tròn là: $\boxed{(C):(x-29)^2+(y-2)^2=10}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{(C):(x+1)^2+(y-2)^2=10 \text{ hay } (C):(x-29)^2+(y-2)^2=10}$

Câu 176. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông *ABCD* tâm *I*, trên cạnh *BC* lấy điểm $E(2;\sqrt{2})$ sao cho *EB* = *AI*. Gọi *M* giao điểm giữa đường thẳng *EI* và *AB*. Đường tròn đường kính *MD* cắt *BD* tại *K*. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông *ABCD* biết rằng phương trình đường thẳng *AK* là: $(3+2\sqrt{2})x-y=0$, *B* thuộc đường thẳng $d: 4x-y-8=0$ và có hoành độ nguyên.

(Trích đề thi thử số 2, Thử sức trước kì thi THPT Quốc Gia, Facebook: Group Toán 3K, năm 2015)

► **Hướng dẫn giải :**



* Dựng hệ trục Axy như hình vẽ và đặt AB = a > 0 ta có $A(0;0), E(a;\frac{a\sqrt{2}}{2}), C(a;a), B(a;0), D(0;a)$

Ta có đoạn ME lần lượt cắt các cạnh của AB, AC, BC của ΔABC tại M, I, E nên theo định Lý Ménélaus,

Ta có: $\frac{EB}{EC}.\frac{IC}{IA}.\frac{MA}{MB}=1 \Rightarrow \frac{MA}{MB}=\frac{MA}{MA+AB}=-1+\sqrt{2} \Leftrightarrow MA=\frac{AB\sqrt{2}}{2}=EB \Rightarrow M(\frac{-a\sqrt{2}}{2};0)$

* B ∈ Ax, D ∈ Ay ⇒ BD: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \Leftrightarrow \boxed{BD: x+y-a=0}$

Do K ∈ đường tròn đường kính MD ⇒ MK ⊥ DK ⇒ MK ⊥ BD ⇒ MK: $x - y + m = 0$.

MK qua M ⇒ $m = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Do đó $\boxed{MK: x - y + \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0}$

K = MK ∩ BD ⇒ $K\left(a\frac{2-\sqrt{2}}{4}; a\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)$

$\overrightarrow{AK} = \left(a\frac{2-\sqrt{2}}{4}; a\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)$ và $\overrightarrow{EK} = \left(a\frac{-\sqrt{2}-2}{4}; a\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)$ a

* Xét $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{EK} = 0 \Leftrightarrow AK \perp EK$ ⇒ d[E;AK] = EK = $\sqrt{3}$

Tứ giác KEAB là tứ giác nội tiếp có góc KBA = góc KEA = 45°

Nên ΔAKE vuông cân tại K. ⇒ AE = EK $\sqrt{2}$ = $\sqrt{6}$

* Mặt khác ΔAEB có $AE^2 = AB^2 + EB^2 \Rightarrow EB^2 = 2(*)$. Ta có B ∈ d ⇒ B(b; 4b - 8) (b ∈ Z).

Giải Phương trình (*) ⇒ b = 2 ⇒ **B(2;0).**

Ta có $\overrightarrow{BC} = \frac{-\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{EB} \Rightarrow \boxed{C(2;1)}$. Viết phương trình AB ⊥ BC và AB qua B ⇒ AB: y = 0

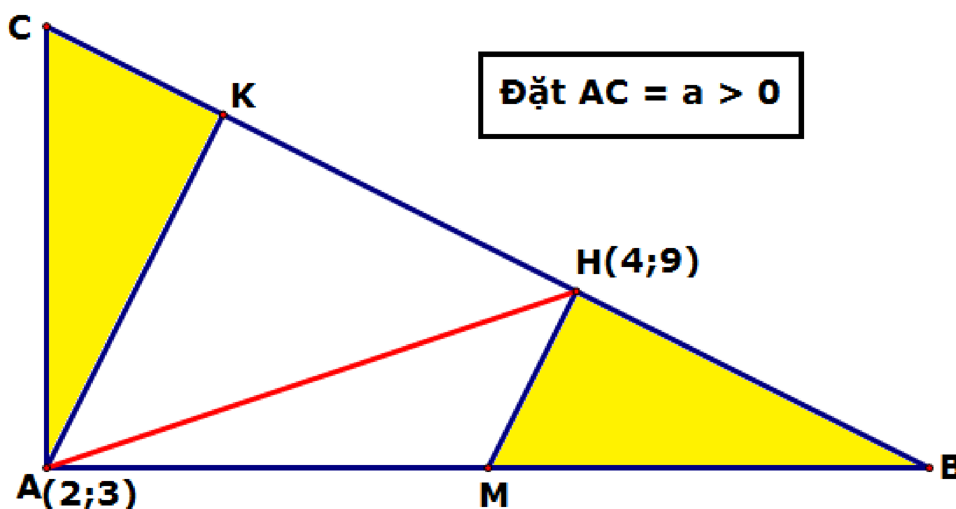
AB ∩ AK = A ⇒ **A(0; 0)** và $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \boxed{D(0;2)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(0;0),\ B(2;0),\ C(2;1),\ D(0;2)}$

Câu 177. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A(2; 3) có AB = 2AC. Goi M là trung điểm của cạnh AB, hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng BC là điểm H(4; 9). Tìm tọa độ đỉnh B và C.

(***Trích đề thi thử lần 2, THPT Chuyên Phổ Thông Năng Khiếu KHTN, Tp Hồ Chí Minh, năm 2013***)

► **Hướng dẫn giải :**



* Đặt cạnh AC = a > 0 ⇒ $AB = 2AC = 2a,\ BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{5}$

Tam giác ABC vuông tại A. kẻ AK vuông BC tại K ta có AK là đường cao của tam giác ABC

Suy ra $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AK = \frac{2a}{\sqrt{5}}$

Mặt khác HM cũng vuông góc BC nên HM // AK có M là trung điểm AB nên HM là đường trung bình tam giác ABK suy ra H là trung điểm KB và $HM = \frac{AK}{2} = \frac{a}{\sqrt{5}}$

* Ta có : $BH.BC = AB^2 \Rightarrow BH = \dfrac{AB^2}{BC} = \dfrac{4a^2}{a\sqrt{5}} = \dfrac{4a}{\sqrt{5}}$ và $BH = \dfrac{2BC}{5} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{BC} = \dfrac{5}{2}\overrightarrow{BH}\ (*)}$

* Áp dụng định lý làm cosin trong tam giác HBA ta có:

$$\cos\widehat{HBA} = \frac{AB^2 + HB^2 - AH^2}{2AB.HB} = \frac{4a^2 + \dfrac{4a^2}{5} - 40}{2.2a\dfrac{2a}{\sqrt{5}}}$$

Mặt khác $\cos\widehat{HBA} = \cos\widehat{CBA} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Do đó $\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{4a^2 + \dfrac{4a^2}{5} - 40}{2.2a\dfrac{2a}{\sqrt{5}}} \Rightarrow \boxed{a^2 = 25}$

* Đặt tọa độ B(a; b). Ta có tọa độ B thỏa hệ: $\begin{cases} AB = 2a \\ BH = \dfrac{2a}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = 100 \\ BH^2 = 20 \end{cases}$

Do đó: $\begin{cases} (a-2)^2 + (b-3)^2 = 100 \\ (a-4)^2 + (b-9)^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2, b = 13 \\ a = 8, b = 11 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(2;13) \\ B(8;11) \end{array}\right.$

Với B(2; 13), từ (*) suy ra $\begin{cases} x_C - x_B = \dfrac{5}{2}(x_H - x_H) \\ y_C - y_B = \dfrac{5}{2}(y_H - y_H) \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(7;3)}$

Tương tự với B(8;11) ta có $\boxed{C(-2;6)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B(2;13),\ C(7;3)\ hay\ B(8;11),\ C(-2;6)}$

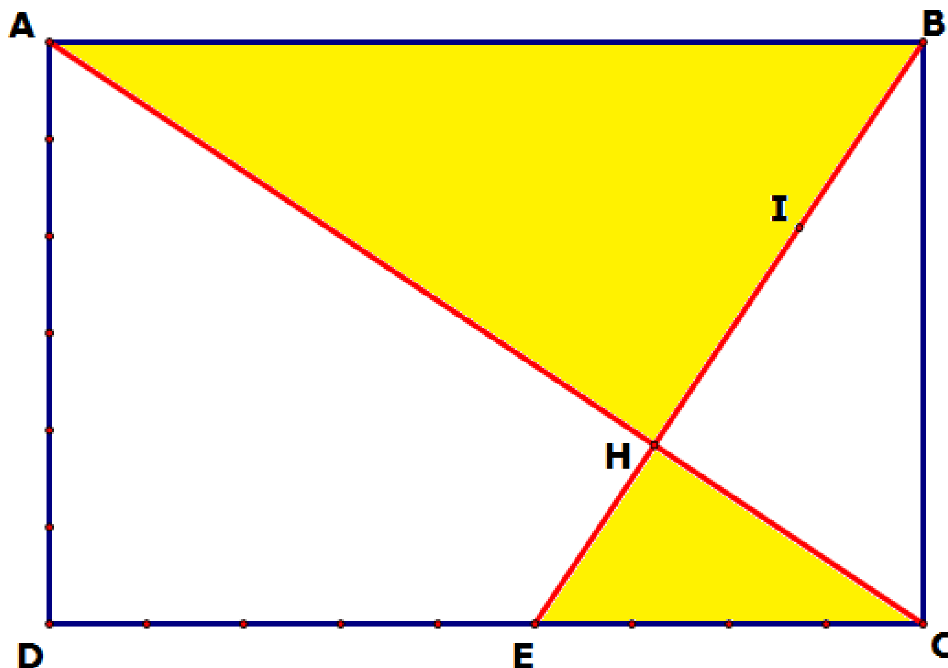
Câu 178. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có: $AB = 3\sqrt{2}$, $BC = 2\sqrt{2}$, điểm E thuộc

đoạn DC sao cho $EC = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, điểm $I(\frac{14}{3};\frac{17}{3})$. thuộc đường thẳng BE. Biết đường thẳng AC có phương trình : $x - 5y + 3 = 0$ và các điểm A, B có hoành độ nguyên dương. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D của hình chữ nhật.

(*Trích đề thi thử lần 2, THPT Tứ Kỳ, Hải Dương, năm 2013*)

► **Hướng dẫn giải :**

Nhận xét: Trươc tiên bạn cần lưu ý "khâu dựng hình" theo như tỉ lệ của đề bài ta có: $EC = \frac{4AB}{9}$, $AC = \frac{2AB}{3}$. Vì vậy nếu không " kheo léo" để ý tỉ lệ đó mà dựng "qua loa" hình vẽ, bạn đọc sẽ không phát hiện được dữ kiện ngầm ẩn cực kì quan trọng trong bài đó chính là: $\boxed{EB \perp AC}$. Do đó để tránh những sai sót trên ta có thể lấy đô dài AB tương đương 9 cm hay 9 ô li trên tập khi đó các cạnh EC, AC sẽ thành EC = 4, AC = 6. Vì vậy việc dựng hình sẽ dễ dàng hơn rất nhiều !)



* Trước hết ta chứng minh AC vuông góc EB.

Xét: $\begin{cases} \tan \widehat{EBC} = \frac{EC}{BC} = \frac{2}{3} \\ \tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{BAC}$. Lại có $\widehat{BAC} + \widehat{BCA} = 90^0$

Suy ra $\widehat{EBC} + \widehat{BCA} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BHC} = 90^0$ $(H = AC \cap BE) \Rightarrow \boxed{AC \perp BE}$

* Do BE vuông góc AC: x – 5y + 3 = 0 nên BE có phương trình: 5x + y + m = 0

BE qua $I\left(\frac{14}{3};\frac{17}{3}\right)$ nên ta có m = - 29 suy ra $\boxed{BE: 5x + y - 29 = 0}$

* Ta có H là giao điểm BE và AC nên tọa độ H thỏa hệ:

$$\begin{cases} 5x + y - 29 = 0 \\ x - 5y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{71}{13} \\ y = \frac{22}{13} \end{cases} \Rightarrow \boxed{H\left(\frac{71}{13};\frac{22}{13}\right)}$$

Ta có: tam giác ABC vuông tại B đường cao BH nên: $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{18} + \frac{1}{8} = \frac{13}{72} \Rightarrow HB^2 = \frac{72}{13}$

Do B thuộc BE nên ta có $B(b;29-5b)$ nên $HB^2 = \frac{72}{13} \Leftrightarrow \left(b - \frac{71}{13}\right)^2 + \left(\frac{355}{13} - 5b\right)^2 = \frac{72}{13}$

Suy ra $\boxed{b=5}$ (tm) hay $b=\frac{77}{13}$ (ktm) nên **B(5;4)**

* Lại có A thuộc AC: x – 5y + 3 = 0 nên **A(5a – 3; a)** và ta có $AB=3\sqrt{2}$

Nên: $BA^2=18 \Leftrightarrow (5a-8)^2+(a-4)^2=18 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{31}{13}\ (ktm) \\ a=1\in Z^+ \end{array}\right.$ nên **A(2; 1)**

* Theo định lý Thales thuận ta có: $\frac{AB}{EC}=\frac{AH}{HC}=\frac{BH}{HE}=\frac{9}{4}\Rightarrow \overrightarrow{AC}=\frac{13}{9}\overrightarrow{AH}\Rightarrow \boxed{C(7;2)}$

Lại có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow \boxed{D(4;-1)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(2;1),\ B(5;4),\ C(7;2),\ D(4;-1)}$

Câu 179. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng chứa cạnh AB là $4x+3y-7=0$, đường phân giác trong góc A cắt cạnh BC tại D, cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại $M\left(\frac{13}{2};\frac{-7}{4}\right)$, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD có tâm $J\left(\frac{63}{22};\frac{-8}{11}\right)$. Tìm tọa độ điểm B biết hoành độ điểm B là số nguyên.

(*Trích đề thi thử THPT Tiên Du 1, Bắc Ninh, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**

* Trước hết ta chứng minh JB vuông góc BM (***phần chứng minh này bạn đọc có thể tham khảo câu 173 chương này để hiểu rõ hơn***).

* Đường AB có phương trình tham số là: $\begin{cases} x=1-3t \\ y=1+4t \end{cases}$ $(t\in R)$ Ta có B thuộc AB $\Rightarrow B(1-3b;1+4b)$

* Do BM vuông góc BJ nên ta có $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{JB}=0$ (*) với $\begin{cases} \overrightarrow{MB}=\left(\frac{-11}{2}-3b;\frac{11}{4}+4b\right) \\ \overrightarrow{IB}=\left(\frac{-41}{22}-3b;\frac{19}{11}+4b\right) \end{cases}$

Vì vậy (*) $\Leftrightarrow \left(\frac{-11}{2}-3b\right)\left(\frac{-41}{22}-3b\right)+\left(\frac{11}{4}+4b\right)\left(\frac{19}{11}+4b\right)=0$

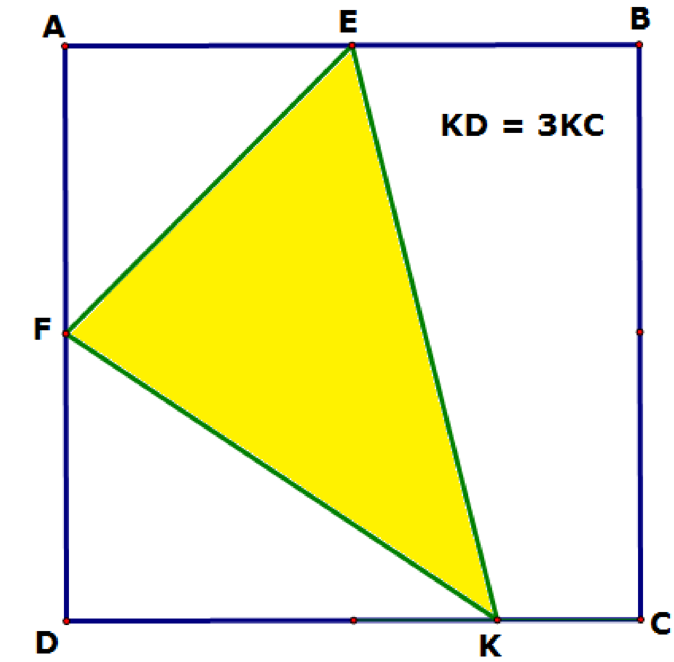
Suy ra: $25b^2+40b+15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-1\in Z \\ b=\dfrac{-3}{5}\notin Z \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{B(4;-3)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B(4;-3)}$

Câu 180. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD, điểm $F\left(\dfrac{11}{2};3\right)$ là trung điểm của cạnh AD. Đường thẳng EK có phương trình 19x – 8y – 18 = 0 với điểm E là trung điểm của cạnh AB, K thuộc cạnh CD và KD = 3KC. Tìm tọa độ đỉnh C của hình vuông ABCD biết điểm E có hoành độ nhỏ hơn 3.

(***Trích đề thi thử lần 1, THPT Đa Phúc, Hà Nội, năm 2015***)

► **Hướng dẫn giải :**



* Đặt cạnh hình vuông AB = a > 0. Ta có: $AF=AE=\dfrac{a}{2},\ DK=\dfrac{3a}{4}$

Khi đó $EF=\dfrac{a}{\sqrt{2}},\ FK=\sqrt{DF^2+DK^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3a}{4}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{13}}{4}$

Và đồng thời $EK=KB=\sqrt{KC^2+BC^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a}{4}\right)^2+a^2}=\dfrac{a\sqrt{17}}{4}$

* Áp dụng định lý hàm số cosin trong tam giác EFK ta có:

$$\cos\widehat{FEK}=\dfrac{EK^2+EF^2-FK^2}{2.EK.EF}=\dfrac{3}{\sqrt{34}}\Rightarrow \sin\widehat{FEK}=\sqrt{1-\left(\cos\widehat{FEK}\right)^2}=\dfrac{5}{\sqrt{34}}$$

* Lại có: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}EF.EK.\sin\widehat{FEK}=\dfrac{1}{2}d[F;EK].EK\Rightarrow \dfrac{a}{\sqrt{2}}.\dfrac{5}{\sqrt{34}}=\dfrac{125}{5\sqrt{17}}\Rightarrow \boxed{a=5}$

* EK có phương trình tham số là: $EK:\begin{cases} x=6+8t \\ y=12+19t \end{cases}(t\in R)$.

Do E thuộc EK nên ta có: $E(6+8e;12+19e)$ Do $x_E<3\Rightarrow 6+8e<3\Leftrightarrow e<\dfrac{-3}{8}$

Ta có $FE^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{25}{2} \Leftrightarrow \left(6+8e-\frac{11}{2}\right)^2 + (12+19e-3)^2 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e = \frac{-1}{2}\ (tm) \\ e = \frac{-11}{34}\ (ktm) \end{array}\right.$

Suy ra $E\left(2;\frac{5}{2}\right)$. Gọi M là trung điểm EF suy ra $M\left(\frac{15}{4};\frac{11}{4}\right)$

* Ta có AC qua M và vuông góc EF nên có phương trình: **AC: 7x + y – 29 = 0**

Ta có: C thuộc AC nên tọa độ C có dạng **C(c; 29 – 7c)**.

Mặt khác: $FC^2 = DF^2 + CD^2 = 5^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{125}{4} \Leftrightarrow \left(c-\frac{11}{2}\right)^2 + (26-7c)^2 = \frac{125}{4}$

Do đó $50c^2 - 375c + 675 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 3 \\ c = \frac{9}{2} \end{array}\right.$. Vậy $C(3;8)$, $C\left(\frac{9}{2};\frac{-5}{2}\right)$

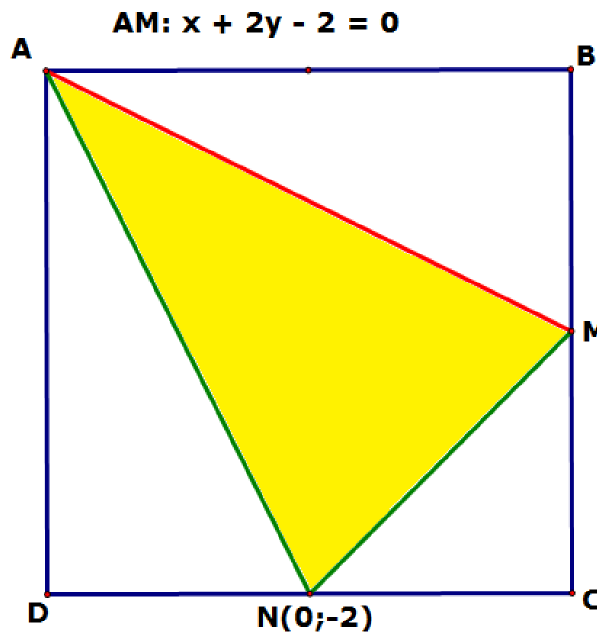
Nhận xét C và F khác phía so với EK nên ta nhận **C(3; 8)**

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{C(3;8)}$

Câu 181. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD. Tìm tọa độ đỉnh B và điểm M biết điểm N(0; -2), M có hoành độ nguyên, đường thẳng AM có phương trình x + 2y – 2 = 0.

(*Trích đề thi thử Khảo sát chất lượng tỉnh Phú Yên, năm 2015*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Đặt cạnh hình vuông ABCD là AB = a > 0.

Khi đó ta có: AM = AN = $\sqrt{AD^2 + DN^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $NM = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Xét định lý hàm số cosin trong tam giác AMN ta có:

$$\cos\widehat{MAN} = \frac{AM^2 + AN^2 - MN^2}{2.AM.AN} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin\widehat{MAN} = \sqrt{1-\left(\cos\widehat{MAN}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

* Lại có: $S_{AMN} = \frac{1}{2}\text{AM.AN}.\sin\widehat{MAN} = \frac{1}{2}d[\text{N;AM}].\text{AM} \Rightarrow \frac{a\sqrt{5}}{2}.\frac{3}{5} = \frac{6}{\sqrt{5}} \Rightarrow \boxed{a=4}$

* Ta có tọa độ điểm M thuộc AM: x + 2y – 2 = 0 suy ra M(2m – 2; m)

Ta có MN = $2\sqrt{2} \Leftrightarrow NM^2 = 8 \Leftrightarrow (2m-2)^2 + (m+2)^2 = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \in Z \\ m = \frac{4}{5} \notin Z \end{array}\right.$

* Khi m = 0 suy ra **M(-2; 0).**

Đặt B(a; b). Ta có: $\begin{cases} MB = 2 \\ NB = 2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+2)^2 + b^2 = 4 \\ a^2 + (b+2)^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -4; b = 0 \\ a = -2; b = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(-4;0) \\ B(-2;2) \end{array}\right.$

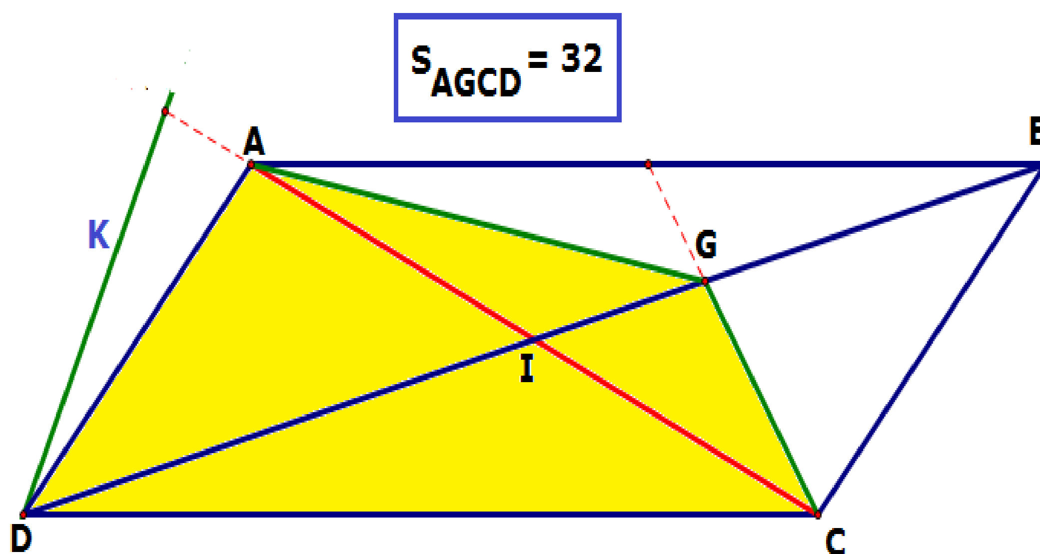
Do B và N trái phía so với AM nên kiểm tra ta nhận B(-2; 2)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B(-2;2)}$

Câu 182. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD biết phương trình AC là $x - y + 1 = 0$, điểm G(1; 4) là trọng tâm tam giác ABC, điểm K(0; -3) thuộc đường cao kẻ từ D của tam giác ACD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành biết diện tích tứ giác AGCD bằng 32 và điểm A có tung độ dương .

(Trích đề thi thử lần 3, THPT Quảng Xương 2, Thanh Hóa, năm 2015)

► **Hướng dẫn giải :**



* Ta có DK vuông góc AC: x – y + 1 = 0 suy ra dạng của phương trình DK là:

DK: x + y + m = 0. DK qua K(0; -3) suy ra m = 3. Do đó **DK: x + y + 3 = 0**

Ta có: $DI = 3GI \Rightarrow d(D; AC) = 3(G; AC)$ với D thuộc DK có tọa độ D(d; – 3 – d)

Do đó: $\frac{|d+3+d+1|}{\sqrt{2}} = 3\frac{|1-4+1|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |2d+4| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = 1 \\ d = -5 \end{array}\right.$

Suy ra: **D(1; -4) hay D(-5; 2)**

* Ta có : $S_{AGCD} = S_{ACD} + S_{GAC} = \frac{1}{2}d(\text{D}; \text{AC}).\text{AC} + \frac{1}{2}d(G; AC).AC = 32$

Suy ra: $4d(G; AC).\text{AC} = 64 \Rightarrow \text{AC} = \frac{16}{d(G; AC)} = \frac{16}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2} \Rightarrow IA = 4\sqrt{2}$ (*)

* Với **D(1; -4)** ta có: $\overrightarrow{DI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}(0; 8) \Rightarrow \boxed{I(1;2)}$ (với I là giao điểm 2 đường chéo AC và BD)

Lại có I là trung điểm BD suy ra **B(1; 8).** Ta có A thuộc AC suy ra **A(a; a + 1).**

Ta có (*) $\Leftrightarrow (a-1)^2 + (a-1)^2 = 32 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5 (tm) \\ a = -3 (ktm) \end{array}\right.$ Do A có tung độ dương.

Suy ra **A(5; 6)** suy ra **C(-3;-2)**

* Với **D(-5; 2)** ta có: $\overrightarrow{DI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}(6; 2) \Rightarrow \boxed{I\left(\frac{-1}{2}; \frac{7}{2}\right)}$ (loại vì không thuộc AC)

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(5;6),\ B(1;8),\ C(-3;-2),\ D(1;-4)}$

Câu 183. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(3;5),\ B(5;3)$. Xác định tọa độ điểm M trên đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=2$ sao cho diện tích tam giác MAB đạt giá trị lớn nhất.

(Thử sức trước kì thi đề số 5, Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ, Số 428, năm 2013)

► Hướng dẫn giải :

* Phương trình đường tròn được viết lại: $\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{y+2}{\sqrt{2}}\right)^2=1$

Đặt $\sin\alpha=\frac{x-1}{\sqrt{2}};\ \cos\alpha=\frac{y+2}{\sqrt{2}}$ thì $\begin{cases} x=\sqrt{2}\sin\alpha+1 \\ y=\sqrt{2}\cos\alpha-2 \end{cases}$ $\alpha\in[0;2\pi]$

* Từ đó ta có $M\left(\sqrt{2}\sin\alpha+1;\sqrt{2}\cos\alpha-2\right)\in(C)$

Phương trình đường thẳng AB: x + y – 8 = 0 . Ta có: $d[M;AB]=\frac{\left|2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-9\right|}{\sqrt{2}}$

* Để diện tích tam giác MAB đạt giá trị lớn nhất thì d[M;AB] lớn nhất khi và chỉ khi

$$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow\boxed{\alpha=\frac{5\pi}{4}}\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{M(0;-3)}$

Câu 184. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với B(0; 1), C(3; 0). Đường phân giác trong góc ABC của tam giác ABC cắt trục tung tại điểm $M\left(0;\frac{-7}{3}\right)$ và chia tam giác ABC thành hai phần có tỉ số diện tích bằng $\frac{10}{11}$ (phần chứa điểm B có diện tích nhỏ hơn phần chưa điểm C). Tìm tọa độ điểm A, biết A có hoành độ âm.

(Trích đặc san số 2, Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ, năm 2012)

► Hướng dẫn giải :

* Phương trình đường phân giác góc BAC có dạng:

$$\Delta:ax+b\left(y+\frac{7}{3}\right)=0\Leftrightarrow 3ax+3by+7b=0\ (a^2+b^2>0)$$

* Ta có: $\begin{cases} \frac{d(B;\Delta)}{d(C;\Delta)}=\frac{10}{11} \\ B,C\ khac\ phia\ so\ voi\ duong\ \Delta \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{|10b|}{|9a+7b|}=\frac{10}{11} \\ 10a(9a+7b)<0 \end{cases}\Leftrightarrow\frac{10b}{9a+7b}=\frac{-10}{11}\Leftrightarrow 2b+a=0$

* Chọn b = -1 thì a = 2. Vậy phương trình phân giác trong góc BAC là: **6x – 3y – 7 = 0**

* Giả sử $A\left(t;2t-\frac{7}{3}\right)(t<0)$. Theo tính chất của đường phân giác trong ta có :

$$\frac{AB}{AC}=\frac{10}{11}\Leftrightarrow 121AB^2=100AC^2\Leftrightarrow 105t^2-80t-100=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\frac{10}{7}\,(ktm) \\ t=\frac{-2}{3}\ (tm) \end{array}\right.$$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A\left(\frac{-2}{3};\frac{-11}{3}\right)}$.

Câu 185. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn có phương trình $x^2+y^2-2x-4y-15=0$ và tọa độ điểm $A(-1;6)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD nội tiếp trong đường tròn đã cho, biết diện tích hình chữ nhật ABCD bằng 20 và điểm B có hoành độ âm.

(Thử sức trước kì thi đề số 6, Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ, Số 429, năm 2013)

► **Hướng dẫn giải :**

* Đường tròn có tâm I(1; 2), bán kính R $=2\sqrt{5}$. Hình chữ nhật nội tiếp trong đường tròn có tâm chính là tọa độ điểm I.

* Vì C đối xứng A qua I nên tọa độ C(3; - 2) và AC = $4\sqrt{5}$.

Hạ BH vuông góc AC (H thuộc AC) thì $S_{ABCD}=2S_{ABC}=AC.BH\Rightarrow BH=\dfrac{20}{4\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

* Phương trình đường thẳng AC: 2x + y – 4 = 0.

Từ điều kiện d(B;AC) = $\sqrt{5}$, B nằm trên đường tròn (I; R) và có hoành độ âm, ta tìm được tọa độ điểm B là: $B(-1-\sqrt{3};1+2\sqrt{3})$. Khi đó, $D(3+\sqrt{3};3-2\sqrt{3})$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-1;6),\ B(-1-\sqrt{3}),C(3;-2),D(3+\sqrt{3};3-2\sqrt{3})}$

Câu 186. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm A(1; 2) và $(C): x^2+y^2+2x-4y+1=0$. Viết phương trình đường tròn (C’) có tâm A và cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho diện tích tam giác AMN đạt giá trị lớn nhất.

(Thử sức trước kì thi đề số 1, Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ, Số 435, năm 2013)

► **Hướng dẫn giải :**

* Ta thấy A thuộc (C) nên AB = AC. Kẻ đường kinh AA’ của (C)

* gọi H là giao điểm AA’ và BC thì AH = $\dfrac{r^2}{4}$ với 0 < r < 4 là bán kinh của (C’)

* do đó $HC=\sqrt{r^2-\dfrac{r^2}{16}}$ nên $S_{ABC}=\dfrac{r^2}{4}\sqrt{r^2-\dfrac{r^2}{4}}$ đặt x = r^2/4 ta có:

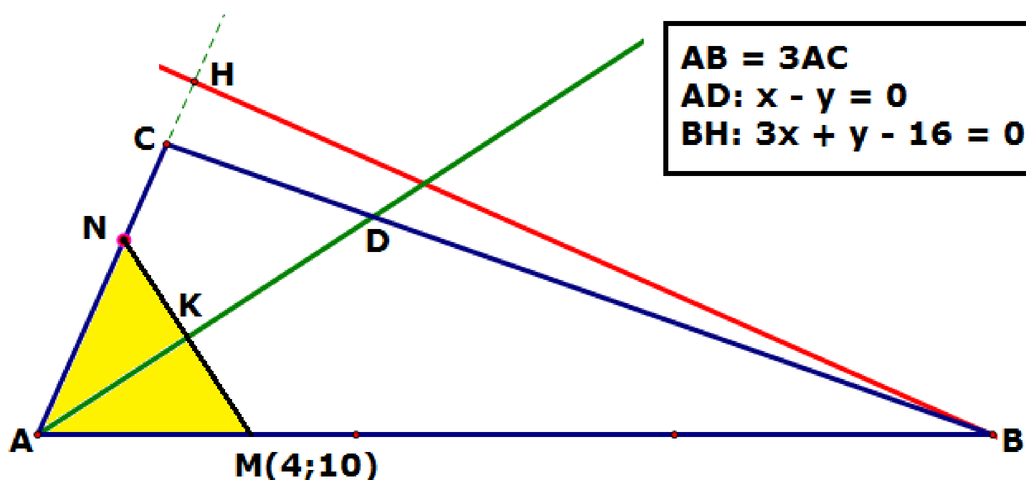
$$S_{ABC}=3\sqrt{3}\sqrt{\frac{x}{3}\frac{x}{3}\frac{x}{3}(4-x)}\le 3\sqrt{3}\Leftrightarrow r=2\sqrt{3}$$

Vậy phương trình đường tròn thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{(C'):(x-1)^2+(y-2)^2=12}$

Câu 187. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có AB = 3AC. Đường phân giác trong của góc BAC có phương trình $x-y=0$, đường cao BH có phương trình $3x+y-16=0$. Hãy xác định tọa độ các điểm A, B, C biết rằng đường thẳng AB đi qua điểm $M(4;10)$.

(Thử sức trước kì thi đề số 4, Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ, Số 415, năm 2012)

► **Hướng dẫn giải :**



* Giả sử H là chân đường cao kẻ từ B, D là chân phân giác trong kẻ từ A.

Gọi K là hình chiếu của M qua phân giác AD và N là điểm đối xứng của M qua AD. Khi đó ta có K là trung điểm MN và N thuộc AC.

$MK \perp AD: x - y = 0 \Rightarrow MK: x + y + m = 0$. MK qua M(4; 10) suy ra m = - 14.

Do đó: MK: x + y – 14 = 0. Mặt khác K là giao điểm MK và AD nên tọa độ K thỏa hệ:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{K(7;7)}$$

Do K là trung điểm MN nên ta suy ra **N(10; 4) thuộc AC.**

* Ta có $AC \perp BH: 3x + y - 16 = 0 \Rightarrow AC: x - 3y + n = 0$. AC qua N(10; 4) suy ra n = 2.

Do đó: AC: x – 3y + 2 = 0. Lại có A là giao điểm AC và AD nên tọa độ A thỏa hệ:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 3y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(1;1)}$$

* Ta có AB qua A(1; 1) nhận $\overrightarrow{AM} = (3;9) = 3(1;3)$ làm vecto chỉ phương có dạng là:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} \Leftrightarrow \boxed{AB: 3x - y - 2 = 0}.$$

Khi đó tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x - y - 2 = 0 \\ 3x + y - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(3;7)}$

* Ta có $C \in AC \Rightarrow C(3c-2;c) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (3c-3;c-1)$ và $\overrightarrow{AB} = (2;6)$

Theo giả thiết ta có: $AB = 3AC \Leftrightarrow AB^2 = 9AC^2 \Leftrightarrow 4 + 36 = 9[(3c-3)^2 + (c-1)^2] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = \frac{5}{3} \\ c = \frac{1}{3} \end{array}\right.$

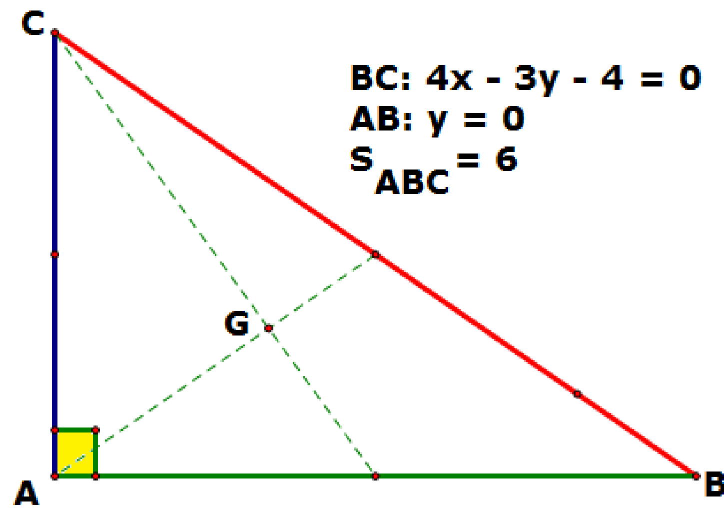
Suy ra $C_1\left(3;\frac{5}{3}\right)$ *hay* $C_2\left(-3;\frac{1}{3}\right)$. Do B và C khác phía so với AD nên ta nhận $C_1\left(3;\frac{5}{3}\right)$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(1;1),\ B(3;7), C\left(3;\frac{5}{3}\right)}$

Câu 188. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, BC có phương trình đường thẳng là $4x - 3y - 4 = 0$. Các đỉnh A, B thuộc trục hoành và diện tích tam giác ABC bằng 6. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

(Thử sức trước kì thi đề số 5, Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ, Số 416, năm 2012)

► **Hướng dẫn giải :**



* Ta có B là giao điểm AB và BC nên tọa độ B thỏa hệ: $\begin{cases} y=0 \\ 4x-3y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(1;0)}$

* Xét $\cos\angle ABC = \dfrac{AB}{BC} = \cos(AB;AC) = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{3}{5} = \dfrac{AB}{\sqrt{AB^2+AC^2}} \Rightarrow AB = \dfrac{3AC}{4}$

Lại có: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = 6 \Leftrightarrow AB.AC = 12 \Leftrightarrow AB.\dfrac{4AB}{3} = 12 \Leftrightarrow AB^2 = 9\,(*)$

Ta có A thuộc trục hoành nên có A(a; 0) do đó (*) $\Leftrightarrow (a-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=4 \\ a=-2 \end{array}\right.$

* Với $A(4;0)$. Ta có AC qua $A(4;0)$ và vuông góc AB nên AC: x – 4 = 0.

Khi đó tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-4=0 \\ 4x-3y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(4;4)}$

Do đó trọng tâm G của tam giác ABC là: $\boxed{G\left(3;\dfrac{4}{3}\right)}$

* Với $A(-2;0)$. Ta có AC qua $A(-2;0)$ và vuông góc AB nên AC: x + 2 = 0.

Khi đó tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+2=0 \\ 4x-3y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(-2;-4)}$

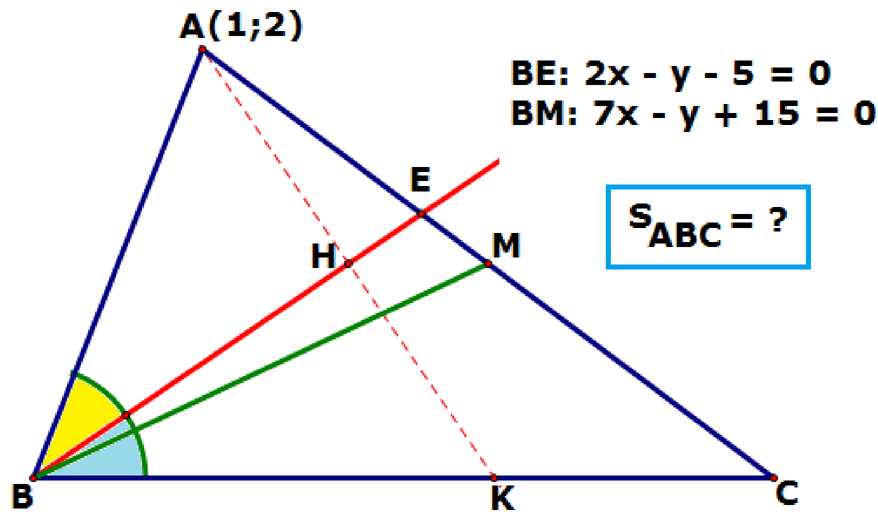
Do đó trọng tâm G của tam giác ABC là: $\boxed{G\left(-1;\dfrac{4}{3}\right)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{G\left(3;\dfrac{4}{3}\right) \text{ hay } G\left(-1;\dfrac{-4}{3}\right)}$

Câu 189. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(1;2)$, đường phân giác trong và trung tuyến kẻ từ đỉnh B có phương trình lần lượt là $BE: 2x-y+5=0,\ BM: 7x-y+15=0.$ Tính diện tích tam giác ABC.

(Thử sức trước kì thi đề số 6, Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ, Số 417, năm 2012)

► **Hướng dẫn giải :**



* Ta có B là giao điểm BM và BE nên toa độ B thỏa hệ $\begin{cases} 2x-y+5=0 \\ 7x-y+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(-2;1)}$

* Gọi H là hình chiếu của A lên phân giác BE và K là điểm đối xứng của A qua BE. Khi đó H là trung điểm AK và K thuộc đường BC.

Ta có: AH vuông góc BE suy ra AH: x + 2y + m = 0. AH qua A(1; 2) suy ra m = - 5.

Do đó AH: x + 2y – 5 = 0. Khi đó tọa độ H thỏa hệ $\begin{cases} 2x-y+5=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{H(-1;3)}$.

Lại có H là trung điêm AK nên ta suy ra tọa độ $K(-3;4) \in BC$

* BC qua K(-3; 4) nhận $\overrightarrow{BK}=(-1;3)$ làm vecto chỉ phương có dạng tham số là:

$BC: \begin{cases} x=-3-t \\ y=4+3t \end{cases} (t \in R)$. Ta có: C thuộc BC nên $C(-3-c;4+3c)$

Lại có M là trung điểm BC suy ra $M\left(\dfrac{-c-2}{2};\dfrac{3c+6}{2}\right)$

* Do M thuộc BM nên ta có: $7\dfrac{-c-2}{2}-\dfrac{3c+6}{2}+15=0 \Leftrightarrow c=1 \Rightarrow C(-4;7)$

Do đó $BC=2\sqrt{10}$. BC có phương trình tổng quát là: BC: 3x + y + 5 = 0

Ta có $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}d[A;BC].BC=\dfrac{1}{2}\dfrac{|3+2+5|}{\sqrt{1^2+3^2}}.2\sqrt{10}=10$ (đvdt).

Vậy yêu cầu bài toán là $\boxed{S_{ABC}=10(dvdt)}$

Câu 190. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: x-y-2=0$, $d_2: x+2y-2=0$. Giả sử d_1, d_2 cắt nhau tại I. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $M(-1;1)$, cắt d_1, d_2 tương ứng tại A và B sao cho AB = 3IA.

(Thử sức trước kì thi đề số 8, Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ, Số 431, năm 2013)

► **Hướng dẫn giải :**

* d_1 cắt d_2 tại I nên tọa độ I thỏa hệ phương trình: $\begin{cases} x-y-2=0 \\ x+2y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I(2;0)}$

Chọn $A_0(0;-2) \in d_1$, ta có $IA_0=2\sqrt{2}$.

* Lấy $B_0(2-2b;b) \in d_2$ sao cho $A_0B_0=3IA_0=6\sqrt{2} \Leftrightarrow (2-2b)^2+(b+2)^2=72$

$$\Leftrightarrow 5b^2-4b-64=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=4 \\ b=-\frac{16}{5} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B_0(-6;4) \\ B_0\left(\frac{42}{5};-\frac{16}{5}\right) \end{array}\right.$$

* Suy ra đường thẳng Δ là đường thẳng qua $M(-1;1)$ và song song với A_0B_0.

* Suy ra phương trình $\Delta: x+y=0$ hoặc $\Delta: x+7y-6=0$.

Vậy phương trình đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{x+y=0 \text{ hay } x+7y-6=0}$

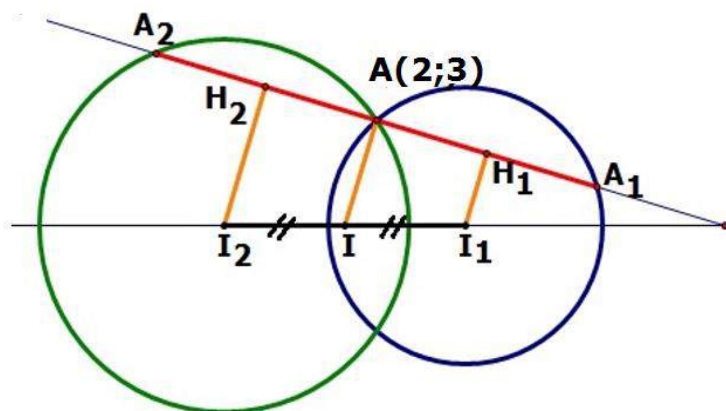
Câu 191. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(2;3)$ là một trong hai giao điểm của đường tròn (C_1) và (C_2) có phương trình lần lượt là $x^2+y^2=13,\ x^2+y^2-12x+11=0$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A cắt (C_1) và (C_2) theo hai dây cung khác nhau có độ dài bằng nhau.

(***Thử sức trước kì thi đề số 8, Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ, Số 419, năm 2012***)

► Hướng dẫn giải cách 1: Sử dụng phương pháp Thales

* Đường tròn (C_1) có $\begin{cases} I_1(0;0) \\ R_1=\sqrt{13} \end{cases}$ và (C_2) có $\begin{cases} I_2(6;0) \\ R_2=\sqrt{36-11}=5 \end{cases}$

Nên ta có: $\begin{cases} R_1+R_2=5+\sqrt{13} \\ |R_1-R_2|=5-\sqrt{13} \\ I_1I_2=6 \end{cases}$ suy ra $|R_1-R_2|\le I_1I_2\le R_1R_2$



Suy ra (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 2 điểm trong đó đã có một điểm chung A(2; 3).

* Gọi H_1, H_2, I lần lượt là trung điểm của AA_1, AA_2, I_1I_2.

Vì H_1, H_2 là trung điểm của hai dây cung AA_1, AA_2 $\Rightarrow I_1H_1 \perp AA_1$, $I_2H_2 \perp AA_2$ (***định lýđường kính và dây cung***) $\Rightarrow I_1H_1 // I_2H_2$.

Do M là trung điểm A_1A_2, I là trung điểm I_1I_2 $\Rightarrow$ MI là đường trung bình của hình thang $I_1I_2H_1H_2$ $\Rightarrow AI // I_1H_1 // I_2H_2 \Rightarrow AI \perp d$

* Ta có I là trung điểm $I_1I_2 \Rightarrow I(3;0)$

Đường thẳng d qua A(2; 3) nhận $\overrightarrow{IA}=(-1;3)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là:

$$-1(x-2)+3(y-3)=0 \Leftrightarrow x-3y+7=0$$

Vậy phương trình đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{x-3y+7=0}$

► Hướng dẫn giải cách 2: Sử dụng phương pháp gọi điểm.

* Chứng minh (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 2 điểm (***xem cách 1***).

* Gọi $A_1(x_1;y_1),\ A_2(x_2;y_2)$. Do A là trung điểm $A_1A_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=2x_A=4 \\ y_1+y_2=2y_A=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=4-x_1 \\ y_2=6-y_1 \end{cases}$

* Ta có: $\begin{cases} A_1 \in (C_1) \\ A_2 \in (C_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = 13 \\ x_2^2 + y_2^2 - 12x_2 + 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = 13 \\ (4 - x_1)^2 + (6 - y_1)^2 - 12(4 - x_1) + 11 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 - 13 = 0 \ \ (1) \\ x_1^2 + y_1^2 + 4x_1 - 12y_1 + 15 = 0 \ \ (2) \end{cases}.$$

* Trừ vế theo vế hai phương trình (1) và (2) ta được: $x_1 - 3y_1 + 7 = 0$

* Đặt d: x - 3y + 7 = 0. Ta có: $\begin{cases} A_1 \in d \ (do(*)) \\ A \in d \end{cases} \Rightarrow$ d: x - 3y + 7 = 0 là phương trình cần tìm.

Vậy phương trình đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{x - 3y + 7 = 0}$

► Hướng dẫn giải cách 3: Sử dụng phương pháp khoảng cách.

* Chứng minh (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 2 điểm (***xem cách 1***).

* Gọi $\vec{n} = (a;b)$, $(a^2 + b^2 \neq 0)$ là véctơ pháp tuyến (vtpt) của đường thẳng d. Đường thẳng d qua A(2;3) có dạng tổng quát là: a(x - 2) + b(y - 3) = 0 ⇒ **d: ax + by - 2a - 3b = 0**

* Theo định lý Pi-ta-go ta có: $\begin{cases} R_1^2 = [d(I_1;d)]^2 + \dfrac{AA_1^2}{4} \\ R_2^2 = [d(I_2;d)]^2 + \dfrac{AA_2^2}{4} \end{cases}$ mà $AA_1 = AA_2$

Suy ra $R_1^2 - [d(I_1;d)]^2 = R_2^2 - [d(I_2;d)]^2 \Leftrightarrow 13 - \dfrac{(-2b - 3b)^2}{a^2 + b^2} = 25 - \dfrac{(4a - 3b)^2}{a^2 + b^2}$

$$\Leftrightarrow (4a - 3b)^2 - (2a + 3b)^2 - 12(a^2 + b^2) = 0 \Leftrightarrow b^2 + 3ab = 0 \ (*)$$

Nhận xét a = 0 $\xrightarrow{(*)}$ b = 0 (loại vì $a^2 + b^2 \neq 0$) nên với $b \neq 0$, ta chọn a = 1

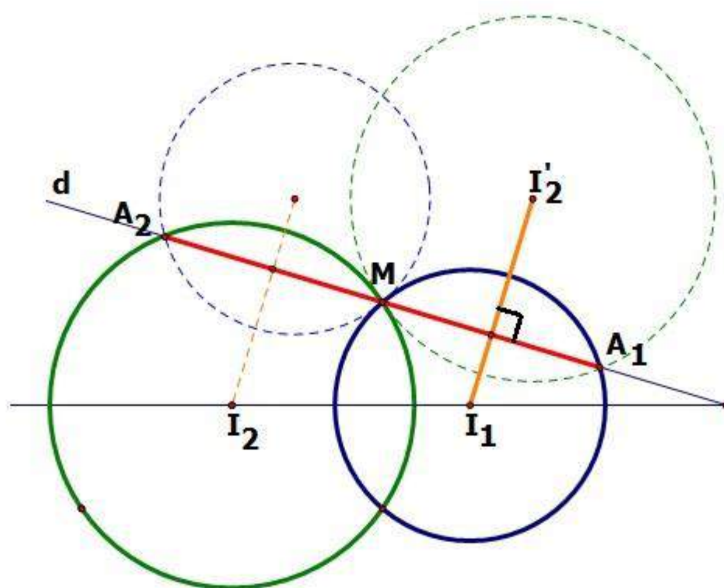
$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow b^2 + 3b = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = -3 \end{array} \right.$$

* TH1: với a = 1, b = -3 ⇒ d_1 : x - 3y + 7 = 0.

TH2: với a = 1, b = 0 ⇒ d_2: x - 2 = 0 (loại do ta có $\overrightarrow{I_1I_2} = (6;0) \Rightarrow \overrightarrow{n_{I_1I_2}} = (0;-1)$ nên $\overrightarrow{n_{I_1I_2}}.\vec{n} = 0$, Khi đó đường thẳng d trở thành đường thẳng chưa dây cung chung của (C_1), (C_2)) .

Vậy phương trình đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{x - 3y + 7 = 0}$

■ CÁCH 4 : Sử dụng phép biến hình (phép đối xứng tâm).



► Hướng dẫn giải cách 4:

* Chứng minh (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 2 điểm (***xem cách 1***).

* Xét phép đối xứng tâm A(2;3) biến điểm $I_2(6; 0)$ thành điểm $I_2'(-2;6)$, biến đường tròn (C_2) thành

đường tròn (C_2') và biến điểm $A_2 \in (C_2)$ thành điểm $A_1 \in$ (C_2').

* Khi đó (C_1) và (C_2') có dây cung AA_1 chung $\Rightarrow I_1I_2' \perp AA_1$

* Đường thẳng d qua A(2; 3) nhận $\overrightarrow{I_1I_2'} = (-2;6) = -2(1;-3)$ làm véctơ pháp tuyến có dạng là:

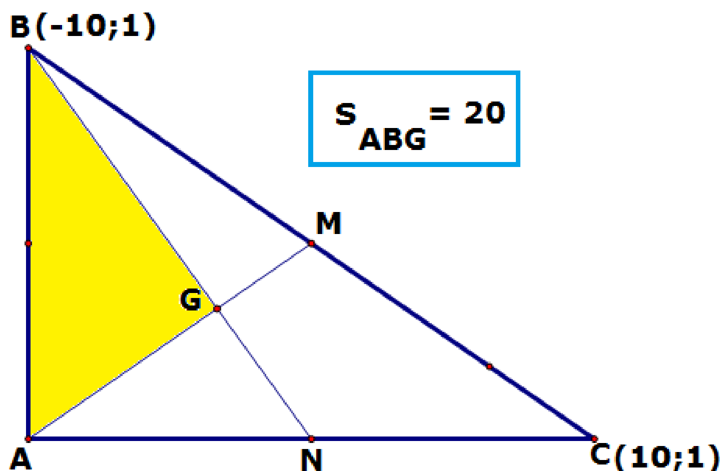
$$-1(x-2)+3(y-3)=0 \Leftrightarrow x-3y+7=0$$

Vậy phương trình đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{x-3y+7=0}$

Câu 192. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A có G là trọng tâm, $B(-10;1)$, $C(10;1)$. Xác định tọa độ đỉnh A biết diện tích tam giác ABG bằng 20.

(Thử sức trước kì thi đề số 3, Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ, Số 426, năm 2012)

► **Hướng dẫn giải : Gọi M là trung điểm BC**



* Ta có: $\begin{cases} S_{ABG} = \dfrac{1}{2}AB.d(G;AB) \\ S_{ABM} = \dfrac{1}{2}AB.d(M;AB) \end{cases} \Rightarrow \dfrac{S_{ABM}}{S_{ABG}} = \dfrac{d(M;AB)}{d(G;AB)} = \dfrac{MA}{GA} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow S_{ABM} = 30$

Suy ra $S_{ABC} = 2S_{ABM} = 60 = \dfrac{1}{2}d(A;BC).BC$ (*)

* Ta có $\overrightarrow{BC} = (20;0) = 20(1;0) \Rightarrow BC = 20$ và đường thẳng BC: y – 1 = 0

Đặt A(a; b). Ta có A thỏa hệ: $\begin{cases} BA \perp CA \\ d(A;BC) = \dfrac{2S_{ABC}}{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA} = 0 \\ d(A;BC) = 6 \end{cases}$ (I)

* Do đó, (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} (a-10)(a+10)+(b-1)(b-1)=0 \\ |b-1| = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 64 \\ |b-1| = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=8; b=7 \\ a=8; b=-5 \\ a=-8; b=7 \\ a=-8; b=-5 \end{array} \right.$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-8;7)\ hay\ A(8;7)\ hay\ A(-8;-5)\ hay\ A(8;-5)}$

Câu 193. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(-2;1)$, $B(1;5)$, $C(4;0)$. Gọi G, H lần lượt trọng tâm, trực tâm của tam giác ABC. Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm A, G, H.

(Thử sức trước kì thi đề số 4, Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ, Số 427 , năm 2013)

► **Hướng dẫn giải :**

* Ta có G là trọng tâm tam giác ABC nên suy ra tọa độ G(1; 2).

* Ta có AH qua H qua A(-2; 1) và nhận $\overrightarrow{BC}=(3;-5)$ làm vecto pháp tuyến nên có dạng là:

$$3(x+2)-5(y-1)=0 \Leftrightarrow \boxed{AH: 3x-5y+11=0}$$

Lại có BH qua B(1; 5) và nhận $\overrightarrow{AC}=(6;-1)$ làm vecto pháp tuyến nên có dạng là:

$$6(x-1)-1(y-5)=0 \Leftrightarrow \boxed{BH: 6x-y-1=0}$$

Khi đó H là giao điểm AH và BH nên tọa độ H thỏa hệ:

$$\begin{cases}3x-5y+11=0\\6x-y-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{16}{27}\\y=\dfrac{23}{9}\end{cases} \Rightarrow \boxed{H\left(\dfrac{16}{27};\dfrac{23}{9}\right)}$$

* Gọi phương trình đường tròn (C) cần tìm có dạng là: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

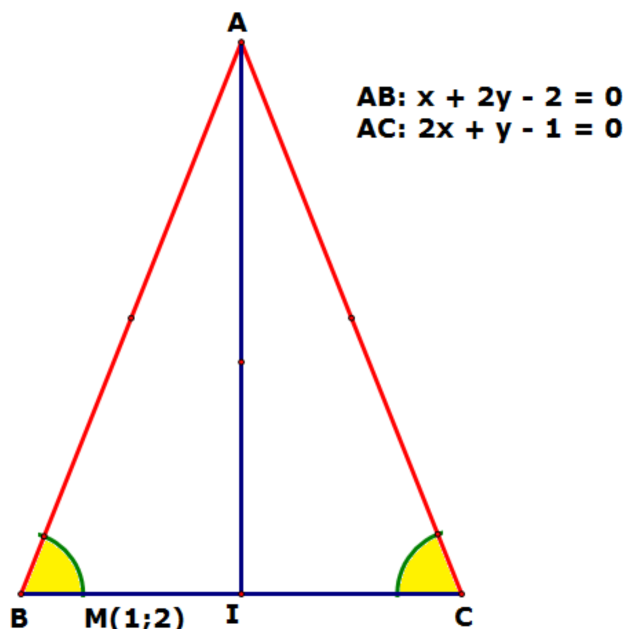
Ta có: $\begin{cases}A\in(C)\\G\in(C)\\H\in(C)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5+4a-2b+c=0\\5-2a-4b+c=0\\\dfrac{5017}{729}-\dfrac{32}{27}a-\dfrac{46}{9}b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{-49}{108}\\b=\dfrac{49}{36}\\c=\dfrac{-25}{54}\end{cases}$

Vậy phương trình đường tròn thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{(C): x^2+y^2+\dfrac{49}{54}x-\dfrac{49}{18}y-\dfrac{25}{54}=0}$

Câu 194. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có phương trình 2 cạnh AB, AB lần lượt là $x+2y-2=0,\ 2x+y+1=0$. Điểm $M(1;2)$ thuộc đoạn BC. Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$ có giá trị nhỏ nhất

(*Trích đề thi thử lần 2 khối A, THPT Quỳnh Lưu 1, Nghệ An, năm 2012*)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi vecto pháp tuyến AB, AC, BC lần lượt là: $\overrightarrow{n_1}=(1;2)$, $\overrightarrow{n_2}=(2;1)$, $\overrightarrow{n_3}=(a;b)\,(a^2+b^2>0)$.

Phương trình BC qua M(1; 2) có dạng: $\boxed{BC: a(x-1)+b(y-2)=0}$

* Tam giác ABC cân tại A nên:

$$\cos B=\cos C \Leftrightarrow |\cos(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2})|=|\cos(\overrightarrow{n_2};\overrightarrow{n_3})| \Leftrightarrow \frac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{5}}=\frac{|2a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ a=b \end{array}\right.$$

* **TH1**: a = - b, ta chọn b = -1 suy ra a = 1 nên BC: x – y + 1 = 0.

Dễ dàng suy ra tọa độ $B(0;1)$, $C\left(\frac{-2}{3};\frac{1}{3}\right)$ (không thỏa mãn M thuộc đoạn BC).

* **TH2**: a = b, ta chọn b = 1 suy ra a = 1 nên BC: x + y – 3 = 0.

Dễ dàng suy ra tọa độ $B(4;-1)$, $C(-4;7)$ (thỏa mãn M thuộc đoạn BC).

* Gọi trung điểm của BC là I(0; 3).

Ta có: $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=DI^2-\frac{BC^2}{4}\geq -\frac{BC^2}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $D\equiv I \Rightarrow \boxed{D(0;3)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{D(0;3)}$

Câu 195. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại A, biết rằng cạnh huyền nằm trên đường thẳng x + 7y – 31 = 0. Điểm N(7; 7) thuộc đường thẳng AC, điểm M(2; –3) thuộc đường thẳng AB.

(*Trích đề thi thử lần 1, THPT Triệu Sơn 4, Thanh Hóa, năm 2012*)

► **Hướng dẫn giải :**

* Đường thẳng AB có phương trình $a(x-2)+b(y+3)=0\ (a^2+b^2>0)$

Do góc ABC bằng 45^0 nên ta có:

$$\cos 45^0=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{|a+7b|}{\sqrt{50}\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow 12a^2-7ab-12b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a=4b \\ 4a=-3b \end{array}\right.$$

* Với 3a = 4b, ta chọn a = 4 suy ra b = 3. Ta có phương trình **AB: 4x + 3y + 1 = 0**

Vì AC vuông AB nên **AC: 3x – 4y + 7 = 0.**

Tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 4x+3y+1=0 \\ 3x-4y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-1;1)}$

Tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x+7y-31=0 \\ 4x+3y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(-4;5)}$

Tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x+7y-31=0 \\ 3x-4y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(3;4)}$

* Với 4a = – 3b, ta chọn a = 3, b = –4, ta có AB: 3x – 4y – 18 = 0.

Vì AC vuông AB nên **AC: 4x – 3y – 49 = 0.**

Tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 4x+3y-49=0 \\ 3x-4y-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(10;3)}$

Tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x+7y-31=0 \\ 3x-4y-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(10;3)\equiv A(!!!)}$ loại

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-1;1), B(-4;5), C(3;4)}$

Câu 196. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có I là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Cho điểm A(1; 0). Tâm đường tròn nội tiếp tam giác ICD là điểm $J\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2};\frac{10-3\sqrt{2}}{2}\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông ABCD biết rằng góc giữa CD và trục hoành nhỏ hơn 45^0

(*Trích đặc san số 2, Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ, năm 2012*)

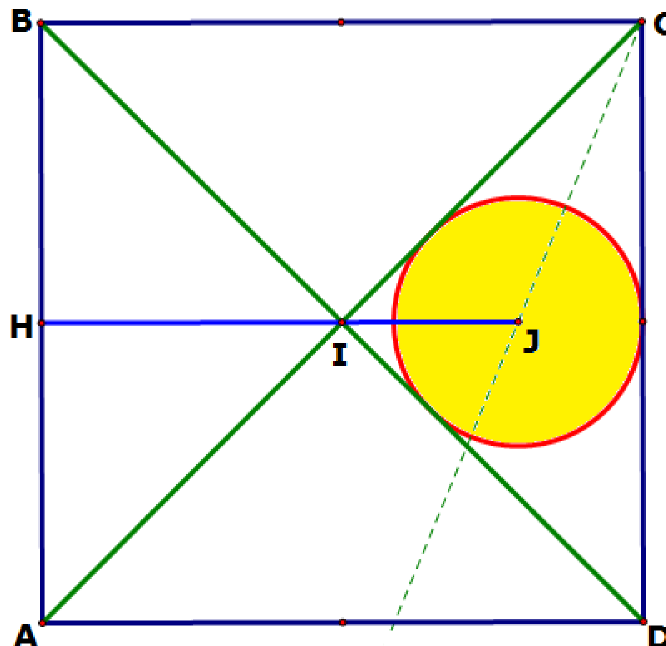
► **Hướng dẫn giải :**

* Gọi độ dài cạnh hình vuông là a > 0. Bán kinh đường tròn nội tiếp tam giác ICD là r, ta có:

$$r=\frac{2S_{ICD}}{IC+ID+CD}=\frac{\frac{a^2}{2}}{a+a\sqrt{2}}=\frac{a}{2(1+\sqrt{2})}=a\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$$

* Ta có: $\frac{d(J;AB)}{d(J;AD)}=\frac{a-r}{\frac{a}{2}}=\frac{a-a\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)}{\frac{a}{2}}=3-\sqrt{2}\ (1)$. Phương trình AB có dạng:

$$AB: k(x-1)+ly=0\ (k^2+l^2>0)\Rightarrow AD: l(x-1)-ky=0$$



* Áp dụng công thức khoảng cách ta có:

$$\frac{d(J;AB)}{d(J;AD)}=\left|\frac{k\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}-1\right)+l\left(\frac{10-3\sqrt{2}}{2}\right)}{l\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}-1\right)+k\left(\frac{10-3\sqrt{2}}{2}\right)}\right|=3-\sqrt{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}l=-3k\\ l=\frac{9-5\sqrt{2}}{2}k\end{array}\right.$$

Ta chọn $(k=1,l=-3)$ $hay\,(k=1;l=\frac{9-5\sqrt{2}}{2})$

Do AB // CD nên góc giữa AB và trục hoành nhỏ hơn 45^0 tức giá trị tuyệt đối của hệ số góc của đường AB nhỏ hơn 1. Do đó chỉ có cặp $k=1,l=-3$ thỏa mãn suy ra **AB: x – 3y – 1 = 0.**

* Phương trình đường thẳng IJ qua J và vuông góc AB có dạng là:

$$3\left(x-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)+\left(y-\frac{10-3\sqrt{2}}{2}\right)=0\Leftrightarrow\boxed{IJ:3x+y-8=0}.$$

Giao điểm giữa IJ và AB là $H\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)\Rightarrow B(4;1)$. Từ đó tìm được **C(3; 4), D(0; 3).**

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B(4;1),\ C(3;4),\ D(0;3)}$

Câu 197. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD có hai đáy là AB và CD. Biết AB = BC, tọa độ điểm $A(2;3)$, đường phân giác của góc $\widehat{ABC}$ có phương trình là $x-y-1=0$, hình chiếu vuông góc của đỉnh B trên đường thẳng CD là điểm $H\left(\frac{29}{5};\frac{8}{5}\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D biết diện tích hình thang ABCD bằng 12.

(Trích đề thi thử số 7, Website: toanmath.com, năm 2015)

► **Hướng dẫn giải :**

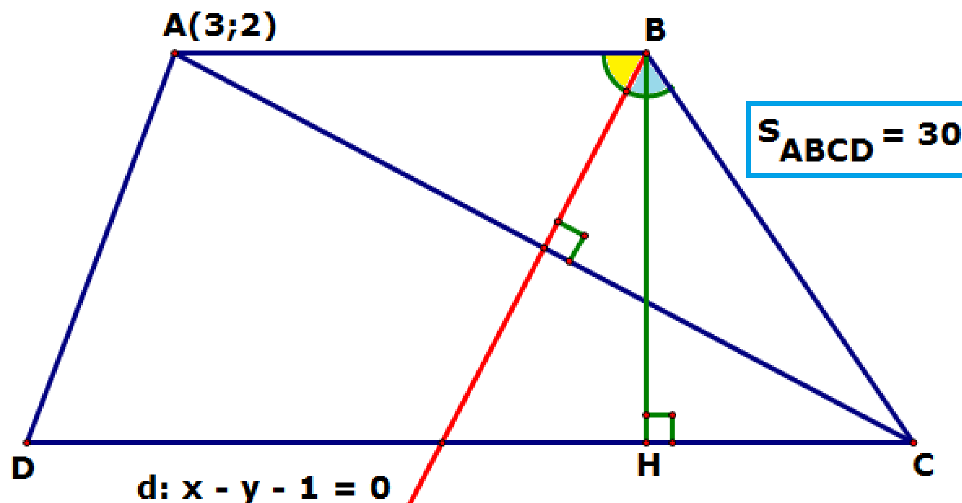
* Tam giác ABC cân tại B nên AC vuông góc đường thẳng d suy ra **AC: x + y – 5 = 0.**

* Gọi I là giao điểm của AC và d, nên tọa độ I là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x+y-5=0\\x-y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}\Rightarrow\boxed{I(3;2)}$

* Lại có I là trung điểm AC nên ta có tọa độ $\boxed{C(4;1)}$.

Đường thẳng BH qua H và nhận $\overrightarrow{HC}=\left(\frac{-9}{5};\frac{-3}{5}\right)=\frac{-3}{5}(3;1)$ làm vecto pháp tuyến có dạng là:

$$\frac{x-\frac{29}{5}}{3}=\frac{y-\frac{8}{5}}{1}\Leftrightarrow\boxed{BH:3x+y+9=0}$$



* Khi đó tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases}3x+y-19=0\\x-y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=4\end{cases}\Rightarrow\boxed{B(5;4)}$.

Ta có: $AB=\sqrt{10},\ BH=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}\Rightarrow S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}BH(AB+CD)\Rightarrow CD=2\sqrt{10}=2AB$.

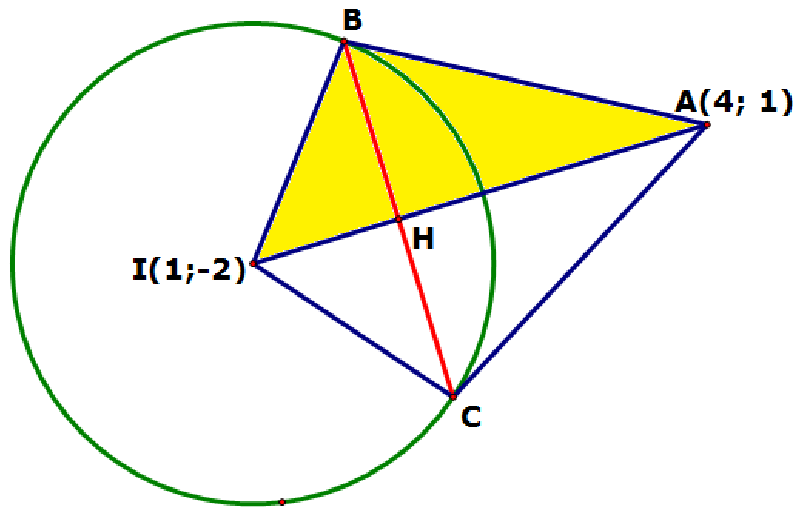
* Suy ra $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}4-x_D=2(5-2)\\1-y_D=2(4-3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=-2\\y_D=-1\end{cases}\Rightarrow\boxed{D(-2;-1)}$.

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{B(5;4),C(4;1),D(-2;-1)}$

Câu 198. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (*C*) có phương trình $x^2+y^2-2x+4y-1=0$ và điểm $A(4;1)$. Viết phương trình đường thẳng *d* cắt (*C*) tại hai điểm *B*, *C* sao cho tam giác *ABC* đều.

(Trích đề thi thử số 8, Website: toanmath.com, năm 2015)

▶ **Hướng dẫn giải :**



* Đường tròn (C) có tâm I(1; -2) và bán kính $R=\sqrt{6}$.

* Vì AB = AC và IB = IC nên IA là đường trung trực của cạnh BC suy ra d vuông góc IA. Do đó đường thẳng d nhận $\overrightarrow{IA}=(3;3)=3(1;1)$ làm vecto pháp tuyến.

* Áp dụng định lý hàm số côsin cho tam giác IAB ta có:

$$IB^2=IA^2+AB^2-2IA.AB.\cos\widehat{IAB}\Leftrightarrow AB^2-3\sqrt{6}AB+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}AB=2\sqrt{6}\Rightarrow AH=3\sqrt{2}\\AB=\sqrt{6}\Rightarrow AH=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$$

* Trường hợp 1: $AH=3\sqrt{2}=AI\Rightarrow H\equiv I\Rightarrow H(1;-2)\Rightarrow\boxed{d:x+y+1=0}$

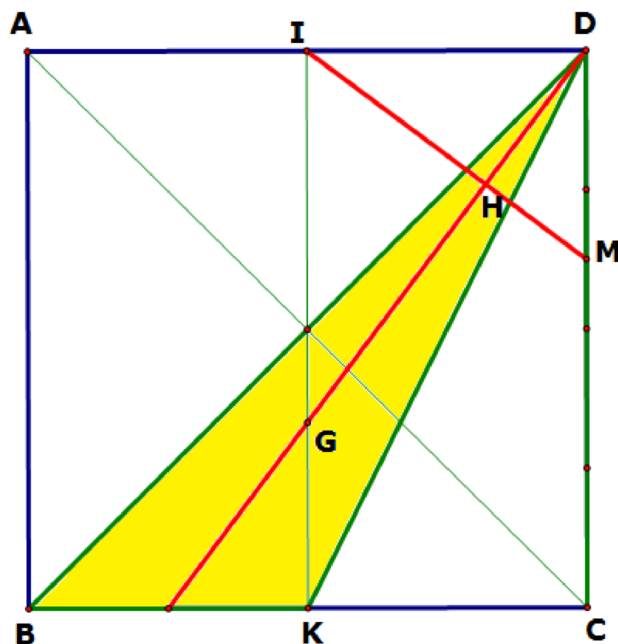
* Trường hợp 2: $AH=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{AI}{2}\Rightarrow$H là trung điểm AI $\Rightarrow H\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{-1}{2}\right)\Rightarrow\boxed{d:x+y-2=0}$

Vậy phương trình đường thẳng yêu cầu bài toán là $\boxed{d:x+y-2=0\ hay\ d:x+y+1=0}$

Câu 199. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có I, K tương ứng là trung điểm của cạnh AD và BC. Điểm M nằm trên cạnh CD sao cho $MD=\dfrac{3MC}{5}$, biết điểm $G\left(-1;\dfrac{-10}{3}\right)$ là trọng tâm của tam giác BDK và đường thẳng IM có phương trình $3x-y-11=0$. Viết phương trình đường thẳng BD.

(Trích đề thi thử số 9, Website: toanmath.com, năm 2015)

▶ **Hướng dẫn giải :**



* Ta có: $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{DL}=(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DM})(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CL})=\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{CL}+\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{CL}$

Suy ra $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{DL}=0+\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{CL}+\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DC}+0$ $(do\ ID\perp DC, DM\perp CL)$

Suy ra $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{DL}=\frac{-1}{2}a.\frac{3a}{4}+\frac{3a}{8}.a=0\Rightarrow DL\perp IM\Rightarrow \boxed{DL:x+3y+11=0}$

* Khi đó tọa độ H là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x+3y+11=0\\3x-y-11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{11}{5}\\y=\frac{-22}{5}\end{cases}\Rightarrow\boxed{H\left(\frac{11}{5};\frac{-22}{5}\right)}$.

Mặt khác $\frac{1}{DH^2}=\frac{1}{DI^2}+\frac{1}{DM^2}=\frac{4}{a^2}+\frac{64}{9a^2}=\frac{100}{9a^2}\Rightarrow DH=\frac{3a}{10}$ (với a = AB > 0)

Do đó, $DL=\sqrt{DC^2+CL^2}=\sqrt{a^2+\frac{9a^2}{16}}=\frac{5a}{4}\Rightarrow DG=\frac{2DL}{3}=\frac{5a}{6}$

* Vì vậy $\frac{DH}{DG}=\frac{9}{25}\Rightarrow\overrightarrow{DH}=\frac{9}{25}\overrightarrow{DG}\Rightarrow\boxed{D(4;-5)}\Rightarrow DG=\frac{5\sqrt{10}}{3}\Rightarrow a=2\sqrt{10}$.

Ta có $I\in IM\Rightarrow I(t;3t-11)$ và $ID^2=10\Leftrightarrow(t-4)^2+(3t-6)^2=10\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\Rightarrow I(3;-2)\\t=\frac{7}{5}\Rightarrow I\left(\frac{7}{5};\frac{-34}{5}\right)\end{array}\right.$

* Mà $\overrightarrow{IG}=4\overrightarrow{JG}$, do đó.

Với $I(3;-2)\Rightarrow J(0;-3)\Rightarrow\overrightarrow{JD}=(4;-2)\Rightarrow\boxed{BD:x+2y+6=0}$

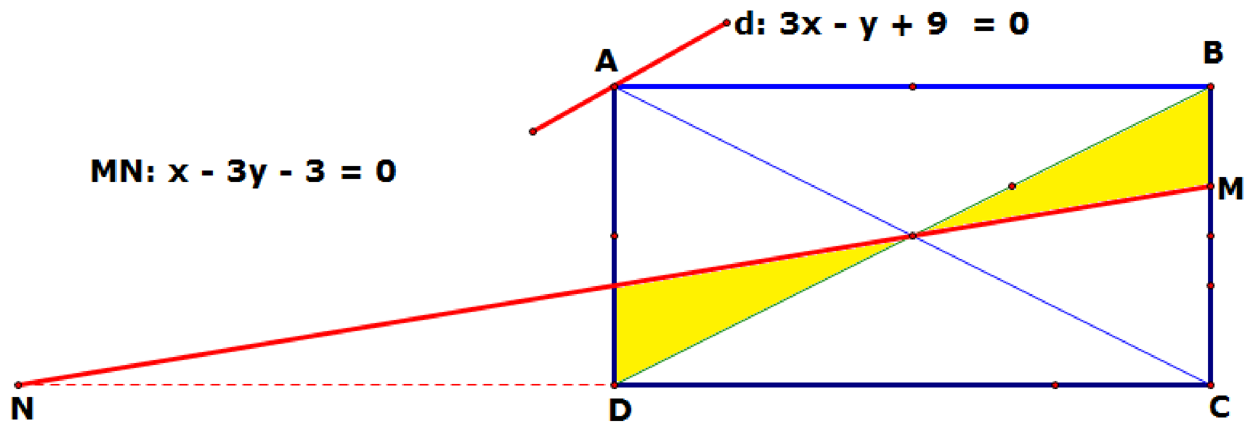
Với $I\left(\frac{7}{5};\frac{-34}{5}\right)\Rightarrow J\left(\frac{-2}{5};\frac{-21}{5}\right)\Rightarrow\overrightarrow{JD}=\left(\frac{22}{5};\frac{-4}{5}\right)\Rightarrow\boxed{BD:2x+11y+47=0}$

Vậy phương trình đường thẳng yêu cầu bài toán là $\boxed{d:x+2y+6=0\ hay\ d:2x+11y+47=0}$

Câu 200. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $MC=2MB$, trên tia đối của DC lấy điểm N sao cho $NC=2ND$. Biết điểm $D(1;-3)$, điểm A nằm trên đường thẳng $d:3x-y+9=0$ và phương trình đương thẳng MN là $4x-3y-3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình chữ nhật ABCD.

(Trích đề thi thử số 10, Website: toanmath.com, năm 2015)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi E là giao điểm của AD và MN. Khi đó ED là đường trung bình của tam giác MCN

Suy ra $ED = \frac{MC}{2} = \frac{BC}{3} = \frac{AD}{3} \Rightarrow \boxed{3\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AD}\ (*)}$

* Ta có $A \in d \Rightarrow A(a;3a+9),\ E \in MN \Rightarrow E\left(e;\frac{4e}{3}-1\right)$. Từ $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a-3e=-2 \\ 3a-4e=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ e=0 \end{cases}$

Suy ra $\boxed{A(-2;3)} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = (3;-6) = 3(1;-2) \Rightarrow \boxed{CD: x-2y-7=0}$

* Khi đó tọa độ điểm N là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4x-3y-3=0 \\ x-2y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{N(-3;-5)}$

* Do D là trung điểm của CN nên ta có **C(5; -1)** mà $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \boxed{B(2;5)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-2;3), B(2;5), C(5;-1)}$

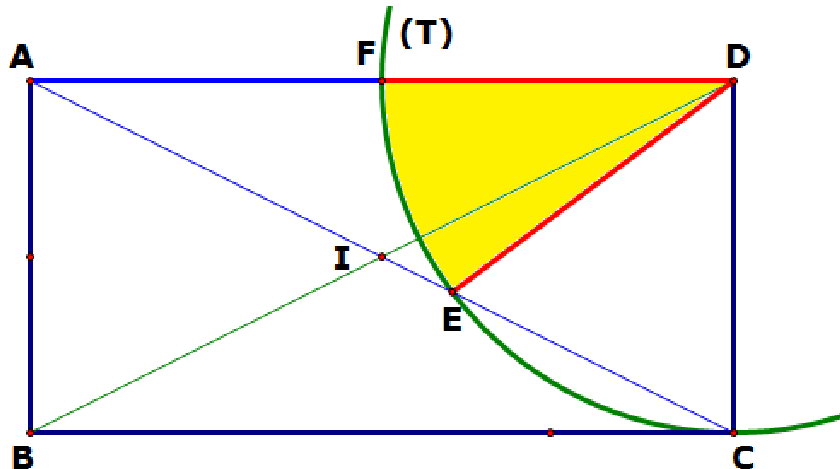
Câu 201. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có AB < AC, đường tròn tâm D bán kính CD cắt các đường thẳng AC, AD lần lượt rại các điểm $E\left(\frac{22}{13};\frac{-7}{13}\right)$ và $F(0;-1)$. Biết điểm D nằm trên đường thẳng $d: x-y-7=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

(Trích đề thi thử số 11, Website: toanmath.com, năm 2015)

▶ **Hướng dẫn giải :**

* Ta có $D \in d \Rightarrow D(d;d-7)$. Vì E, F thuộc đường tròn (T) nên DE = DF

$$\Leftrightarrow DE^2 = DF^2 \Leftrightarrow \left(d-\frac{22}{13}\right)^2 + \left(d-\frac{84}{13}\right)^2 = d^2 + (d-6)^2 \Leftrightarrow d = 2 \Rightarrow \boxed{D(2;-5)}$$



* Suy ra $\overrightarrow{FD}=(2;-4)=2(1;-2)\Rightarrow\begin{cases}CD: x-2y-12=0\\ AD: 2x+y+1=0\\ (T):(x-2)^2+(y+5)^2=20\end{cases}$

* Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-2y-12=0\\ (x-2)^2+(y+5)^2=20\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6;y=-3\\ x=-2;y=-7\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}C(6;-3)\\ C(-2;-7)\end{array}\right.$

Do C và E cùng phía so với đường AD nên ta nhận **C(6; -3)**

* Ta có $\overrightarrow{EC}=\left(\frac{56}{13};\frac{-32}{13}\right)=\frac{8}{13}(7;-4)\xrightarrow{AC\ qua\ C}\boxed{AC: 4x+7y-3=0}$

Tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}4x-7y-3=0\\ 2x+y+1=0\end{cases}\Rightarrow\boxed{A(-1;1)}$.

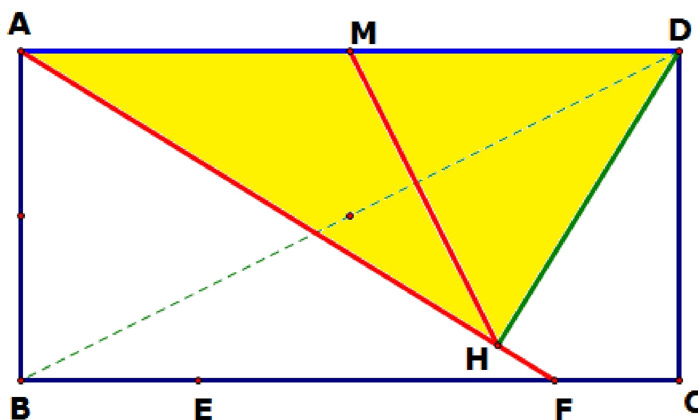
Ta có: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow\boxed{B(3;3)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-1;1), B(3;3), C(6;-3), D(2;-5)}$

Câu 202. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng 30, hai điểm $E(3;3)$, điểm F nằm trên đường thẳng BC. Hình chiếu vuông góc của điểm D trên đường thẳng AF là điểm $H\left(\frac{14}{5};\frac{-3}{5}\right)$. Biết điểm $M\left(\frac{-1}{2};0\right)$ là trung điểm của cạnh AD và đường thẳng BC có hệ số góc là một số nguyên. Tìm tọa độ của hình chữ nhật ABCD.

(Trích đề thi thử số 12, Website: toanmath.com, năm 2015)

► **Hướng dẫn giải :**



* Tam giác HAD vuông tại H có MH là trung tuyến nên $AD=2MH=3\sqrt{5}$

Ta có: $S_{ABCD}=AB.AD=30\Rightarrow AB=2\sqrt{5}\Rightarrow d(M;BC)=2\sqrt{5}$

* Đường thẳng BC đi qua E nên phương trình có dạng $ax+by-3a-3b=0$.

Ta có $d(M;BC)=2\sqrt{5}\Leftrightarrow\dfrac{\left|\frac{-a}{2}-3a-3b\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{5}\Leftrightarrow 31a^2-84ab+44b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2b\,(tm)\\ 31a=22b\,(ktm)\end{array}\right.$

Suy ra $BC: 2x+y-9=0\Rightarrow AD: 2x+y+1=0$. Ta có $A\in AD\Rightarrow A(a;-2a-1)$

* $AM=\frac{3\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+(2a+1)^2=\frac{45}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\Rightarrow A(1;-3)\\ a=-2\Rightarrow A(-2;3)\end{array}\right.$

Với $A(1;-3)\xrightarrow{M}D(-2;3)$. Phương trình đường thẳng AB là x – 2y – 7 = 0.

Tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-2y-7=0\\ 2x+y-9=0\end{cases}\Rightarrow\boxed{B(5;-1)}$

Phương trình đường thẳng CD là x – 2y + 8 = 0 và tọa độ C thỏa $\begin{cases} x-2y+8=0 \\ 2x+y-9=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(2;5)}$

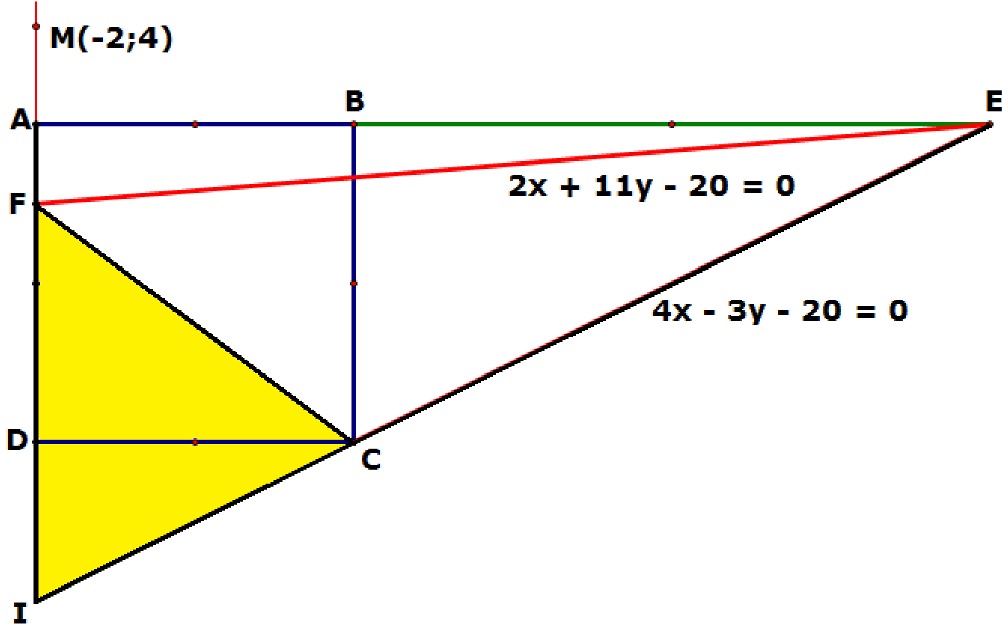
* Với $A(-2;3)$, giải tương tự ta có $\boxed{D(1;-3), B(2;5), C(5;-1)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\left[\begin{array}{l} D(-2;3), B(2;5), C(5;-1), A(1;-3) \\ A(-2;3), B(2;5), C(5;-1), D(1;-3) \end{array}\right.$

Câu 203. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD, trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $EB = 2AB$ và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho $DF = 3AF$. Các đường thẳng CE, CF tương ứng có phương trình là $4x-3y-20=0$ và $2x+11y-10=0$ .Biết điểm $M(-2;4)$ nằm trên đường thẳng AD, tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD.

(Trích đề thi thử số 13, Website: toanmath.com, năm 2015)

► **Hướng dẫn giải :**



* Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4x-3y-20=0 \\ 2x+11y-10=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(5;0)}$

* Gọi I là giao điểm của AD và CE: $\frac{ID}{IA} = \frac{CD}{AE} = \frac{1}{3}$. Đặt AB = a > 0. Ta có $\begin{cases} ID = \frac{AD}{2} = \frac{a}{2} \\ DF = \frac{3AD}{4} = \frac{3a}{4} \end{cases}$

* Ta có: $\begin{cases} IF = ID + DF = \frac{5a}{4} \\ CF = \sqrt{CD^2 + DF^2} = \frac{5a}{4} \end{cases} \Rightarrow IF = CF$ suy ra tam giác ICF cân tại F.

* Gọi vecto pháp tuyến của đường thẳng AD là $\vec{n} = (a;b)\,(a^2+b^2>0)$.

Ta có: $\cos\widehat{FIC} = \cos\widehat{FCI} \Leftrightarrow \left|\cos(\vec{n};\overrightarrow{n_{CE}})\right| = \left|\cos(\overrightarrow{n_{CF}};\overrightarrow{n_{CE}})\right| \Leftrightarrow \frac{|4a-3b|}{5\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4.2-3.11|}{5\sqrt{125}}$

Nên $|4a-3b| = \sqrt{5(a^2+b^2)} \Leftrightarrow 11a^2 - 24ab + 4b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2b \Rightarrow AD: 2x+y=0 \\ 11a = 2b\ (ktm) \end{array}\right.$

* Phương trình đường thẳng CD: x – 2y – 5 = 0.

Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-2y-5=0 \\ 2x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D(1;-2)}$

Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4x-3y-20=0 \\ 2x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I(2;-4)}$

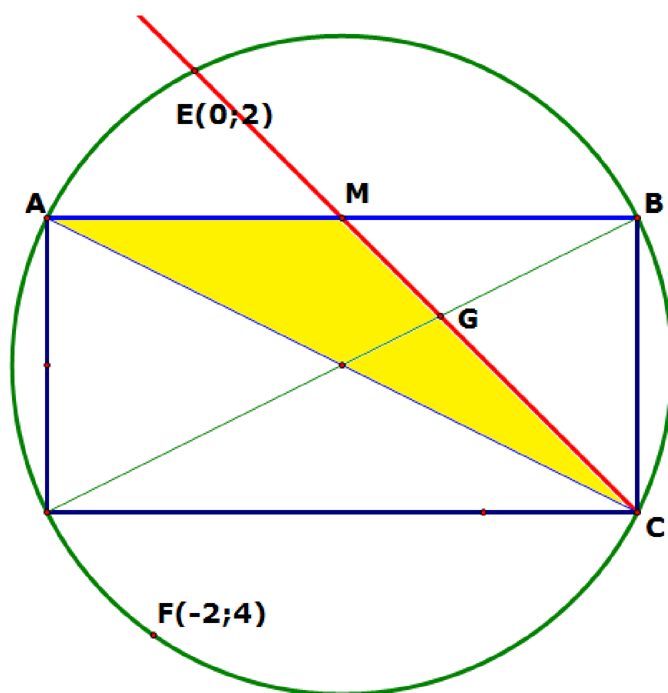
* Ta có: $\overrightarrow{DA}=2\overrightarrow{ID} \Rightarrow \boxed{A(-1;2)}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow \boxed{B(3;4)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-1;2), B(3;4), C(5;0), D(1;-2)}$

Câu 204. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD nội tiếp đường tròn (C). Gọi M là trung điểm của cạnh AB, đường thẳng CM cắt đường tròn (C) tại $E(0;2)$. Biết $G\left(\frac{10}{3};\frac{1}{3}\right)$ là trọng tâm của tam giác ABC, điểm $F(2;-4)$ nằm trên đường tròn (C) và đểm B có hoành độ dương. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

(Trích đề thi thử số 14, Website: toanmath.com, năm 2015)

► **Hướng dẫn giải :**



* Gọi I(a; b) là tâm hình chữ nhật ABCD. Ta có: $\begin{cases} IE=IF \\ IE=3IG \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+(b-2)^2=(a-2)^2+(b+4)^2 \\ a^2+(b-2)^2=9\left(x-\frac{10}{3}\right)^2+9\left(y-\frac{1}{3}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{41}{8}; y=\frac{3}{8} \\ x=\frac{5}{2}; y=\frac{-1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} I\left(\frac{41}{8};\frac{3}{8}\right) \\ I\left(\frac{5}{2};\frac{-1}{2}\right) \end{array}\right.$$

* Với $I\left(\frac{41}{8};\frac{3}{8}\right)$, $\overrightarrow{IB}=3\overrightarrow{IG} \Rightarrow B\left(\frac{-1}{4};\frac{1}{4}\right)$ (ktm) .Với $I\left(\frac{5}{2};\frac{-1}{2}\right)$, $\overrightarrow{IB}=3\overrightarrow{IG} \Rightarrow B(5;2) \Rightarrow D(0;-3)$

* Ta có: $\overrightarrow{EG}=\left(\frac{10}{3};\frac{-5}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{n_{EG}}=(1;2) \Rightarrow \boxed{EF: x+2y-4=0}$.

$IB=\frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow (C):\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$. Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

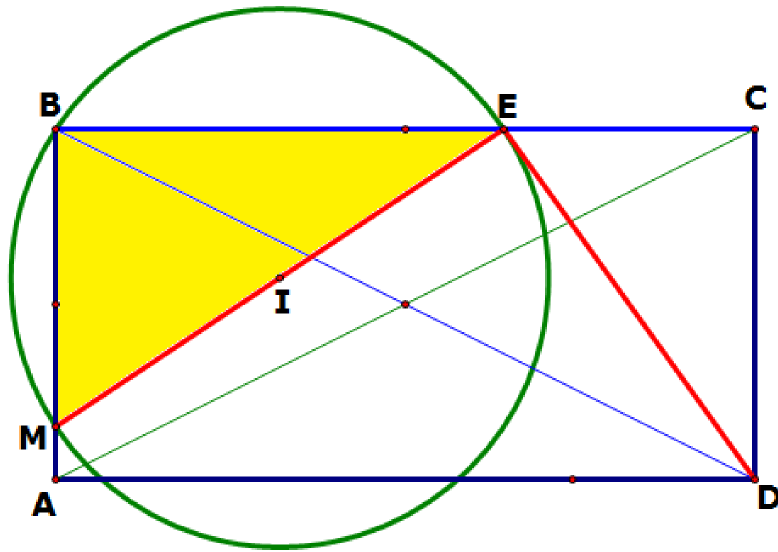
$$\begin{cases}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{2}\\ x+2y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,y=2\ (ktm)\\ x=6;y=-1\ (tm)\end{array}\right.\Rightarrow C(6;-1)\Rightarrow A(-1;0)$$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-1;0),B(5;0),C(6;-1),D(0;-3)}$.

Câu 205. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm E nằm trên cạnh BC, phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABE là $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{25}{4}$ và phương trình đường thẳng $DE:3x+4y-18=0$. Biết điểm $M(0;-3)$ nằm trên đường thẳng AB, tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

(Trích đề thi thử số 15, Website: toanmath.com, năm 2015)

► **Hướng dẫn giải :**



* Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE có tâm $I\left(\frac{1}{2};1\right)$, bán kính $R=\frac{5}{2}$.

Tọa độ điểm E là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{25}{4}\\ 3x+4y-18=0\end{cases}\Rightarrow\boxed{E(2;3)}$

* Do tam giác ABE vuông tại B nên I là trung điểm của AE suy ra **A(-1; -1).**

Suy ra $\overrightarrow{AM}=(1;-2)\Rightarrow AB:2x+y+3=0\Rightarrow BC:x-2y+4=0\Rightarrow AD:x-2y-1=0$

* Tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases}2x+y+3=0\\ x-2y+4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=1\end{cases}\Rightarrow\boxed{B(-2;1)}$.

Tọa độ D là nghiệm của hệ $\begin{cases}3x+4y-18=0\\ x-2y-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\ y=\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\boxed{D\left(4;\frac{3}{2}\right)}$

* Ta có $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\begin{cases}x_C=x_D-x_A+x_B=3\\ y_C=y_D-y_A+y_B=\frac{7}{2}\end{cases}\Rightarrow\boxed{C\left(3;\frac{7}{2}\right)}$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $\boxed{A(-1;-1),B(-2;1),C\left(3;\frac{7}{2}\right),D\left(4;\frac{3}{2}\right)}$